Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Rede – Matematica em Rede Nacional

BENEDITO DINIZ DOS SANTOS JUNIOR

Jogos Matemáticos:
metodologia de ensino baseada em jogos - uma experiência em sala de aula

São Luís
2015

BENEDITO DINIZ DOS SANTOS JUNIOR

Jogos Matemáticos:
metodologia de ensino baseada em jogos - uma experiência em sala de aula

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Gra-duação em Rede – Matematica em Rede Nacional, da UFMA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matematica.

Orientador: João de Deus Mendes da Silva

Doutor em Matemática – UFMA

São Luís

2015

Santos Junior, Benedito Diniz dos

Jogos Matemáticos: **metodologia de ensino baseada em jogos - uma experiência em sala de aula / Benedito Diniz dos Santos Junior – 2015**

xx.p

1. Educação 2. Jogos matemáticos 3. Geometria Analítica. I. Título.

CDU XXXXXX

BENEDITO DINIZ DOS SANTOS JUNIOR

Jogos Matemáticos:
metodologia de ensino baseada em jogos - uma experiência em sala de aula

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Gra-duação em Rede – Matematica em Rede Nacional, da UFMA, como requisito parcial para a obtenção grau de Mestre em Matematica.

Aprovado em 31 de março de 2015

BANCA EXAMINADORA

João de Deus Mendes da Silva

Doutor em Matemática – UFMA

Dr. José Cloves Verde Saraiva

Doutor em Matemática - UFMA

Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Doutora em Matemática - UEMA

À minha esposa, Conceição Alexandre.

Às minhas filhas, Ana Luísa e Maria Eduarda.

À minha mãe Maria José (in memorian)

Resumo

O presente trabalho consiste na aplicabilidade e elaboração de jogos matemáticos para os alunos da terceira série do ensino médio. Com a finalidade de demonstrar que o jogo pode se utilizado em qualquer fase do ensino, é relatado uma experiência prática com jogos aplicada nas duas turmas do turno matutino do Centro de Ensino São Cristóvão, São Luís – MA. A atividade foi desenvolvida no segundo semestre de 2014 visando consolidar conceitos de Geometria Analítica. Com os resultados alcançados, notou-se maior interesse dos alunos em relação ao conteúdo, superando as dificuldades encontradas nas aulas tradicionais e melhorando a participação e o aproveitamento desses alunos na fase final dos estudos do ensino médio. Percebeu-se que a utilização de metodologias diferenciadas tornaram os conteúdos mais interessantes e, consequentemente, forneceram aos estudantes mais elementos na busca de melhores resultados.

Palavras-chaves: Educação. Jogos matemáticos. Geometria Analítica.

Abstract

This work consists of the applicability and development of mathematical games for students of the third year of high school. In order to demonstrate that the game can be used at any stage of education, is reported practical experience with games applied to two classes of the morning shift of Saint Kitts Education Center, São Luís - MA. The activity was applied in the second half of 2014 to consolidate concepts of analytic geometry. With the results, showed the best interest of students in the content, overcoming the difficulties encountered in traditional classes and improving the participation and the use of these students in the final stage of basic education studies teaching. It was noticed that the use of different methodologies become the most interesting content and thus provided to students more elements in the search for better results.

Keywords: Education. Mathematical games. Analytic Geometry.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pai todo poderoso, pela oportunidade de cursar e concluir este mestrado.

A todos os meus parentes, pelo encorajamento e pelas palavras de conforto direcionadas nos momentos de dificuldades e por estarem sempre atentos e próximos nesta caminhada.

Ao professor Dr. João de Deus Mendes da Silva, por todas suas sinalizações, atenção, competência e por ter sido um modelo intelectual, além de companheiro de todas as horas como orientador deste trabalho sem o qual não se concretizaria.

A cada professor do Profmat pelos seus ensinamentos que contribuíram para o enriquecimento pessoal e profissional.

Aos meus alunos do Centro de Ensino São Cristóvão, que entenderam a importância deste trabalho para a melhoria da aprendizagem.

Aos colegas do Profmat, pelos momentos de aprendizagem e companheirismo, em especial, Altenize Oliveira, Eldon Pacheco, Eugênio Moraes e Raimundo Neto que contribuíram diretamente na conclusão deste trabalho.

A todas as pessoas que tomaram conhecimento da realização do curso e que me apoiaram.

"E assim tecendo argumento...

Mantenho a minha razão.

Assim jogando palavras...

Controlo o batimento do coração."

– Trecho de canção de Kid Abelha

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O presente trabalho consiste no relato de uma metodologia de ensino construída e vivenciada na terceira série matutino do ensino médio do Centro de Ensino São Cristovão. A experiência se constitui na aplicação e na elaboração de um jogo para o ensino de matemática, no caso específico o jogo aborda conteúdos de Geometria Analítica. Inicialmente a finalidade era diversificar as aulas, tornando-as mais atrativas e significativas para esses alunos.

No decorrer do trabalho percebeu-se que diversas outras atitudes foram desenvolvidas, como por exemplo, despertar o interesse por atividades em grupo promovendo a interação entres eles. Além disso, o jogo promove situações interessantes, envolventes e desafiadoras, permitindo que os alunos encontrem resoluções para os problemas propostos. Nesse aspecto, o jogo ganha espaço como ferramenta de aprendizagem na medida em que estimula e ajuda na construção do conhecimento.

Na opinião de Groenwald e Timm(2000), *"o uso de jogos e curiosidades no ensino da Matemática tem o objetivo de fazer com que os adolescentes gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno envolvido. A aprendizagem através de jogos, como dominó, palavras cruzadas, memória e outros permitem que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido"*. Para isso, os jogos devem ocupar os espaços de sala de aula preenchendo as lacunas produzidas na atividade escolar diária. Neste sentido verificamos que há três aspectos que por si só justificam a incorporação do jogo nas aulas: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais.

A realização deste trabalho justifica-se pela necessidade encontrada em motivar os alunos em relação aos conteúdos de matemática, uma vez que sempre foi vista pelos alunos e educadores de modo geral como um problema de difícil resolução, portanto, pouco apreciada, justificando assim o baixo rendimento escolar dos alunos das séries em geral.

De acordo com Klein e Costa(2011),

"O estudo da matemática nas escolas é um tema espinhoso para a maioria dos alunos, mesmo que este tema esteja presente no cotidiano do aluno e seja de grande importância para a compreensão de outros conteúdos. Dessa forma cabe ao professor criar condições para que o aluno aprenda numa atitude de relacionamento e interação com o professor e com seus colegas de turma. Com jogos em sala de aula o aluno torna-se protagonista desta aprendizagem."

São os mais variados possíveis os sentidos que o jogo assume dentro da escola, dentre tantos que podemos utilizar e que atendam às necessidades de aprendizagem citaremos dois referenciais básicos, quais sejam, Kamii(1991) e Krulik(1997).

Deles depreendemos que:

1. O jogo deve ser para dois ou mais jogadores, sendo, portanto, uma atividade que os alunos realizam juntos;

2. Jogo deverá ter um objetivo a ser alcançado pelos jogadores, ou seja, ao final, deverá haver um vencedor;

3. O jogo deverá permitir que os alunos assumam papéis interdependentes, opostos e cooperativos, isto é, os jogadores devem perceber a importância de cada um na realização dos objetivos do jogo, na execução das jogadas, e observar que um jogo não se realiza a menos que cada jogador concorde com as regras estabelecidas e coopere seguindo-as e aceitando suas consequências;

4. O jogo deve ter regras preestabelecidas que não podem ser modificadas no decorrer de uma jogada, isto é, cada jogador precisa perceber que as regras são um contrato aceito pelo grupo e que sua violação representa uma falta; havendo o desejo de fazer alterações, isso deve ser discutido com todo o grupo e, no caso de concordância geral, podem ser impostas ao jogo daí por diante;

5. No jogo, deve haver a possibilidade de usar estratégias, estabelecer planos, executar jogadas e avaliar a eficácia desses elementos nos resultados obtidos, isto é, o jogo não deve ser mecânico e sem significado para os jogadores.

No jogo, conforme observado no item 4, as regras são parâmetros de decisão, uma vez iniciada uma partida, cada um dos jogadores concorda com as regras que passam a valer para todos os participantes.

> *"E as regras são consideradas o ponto principal para o sucesso dos jogos" (Mattar,* 2010*).*

Em caso de conflitos, as regras devem ser consultadas para que os jogadores cheguem a um acordo e resolvam seus conflitos.

Para escolher os jogos, é importante classificá-los. Diversas são as classificações dadas aos jogos. De modo geral, baseados em regras, os jogos matemáticos utilizados nas aulas podem ser classificados em dois tipos: os de estratégia e de conhecimento.

Os jogos de estratégia são aqueles cujo objetivo é encontrar jogadas que levem a estratégias vencedoras onde são trabalhadas as habilidades que compoem o raciocínio lógico. Com eles, em posse das regras, os alunos buscam caminhos para atingirem o objetivo final, utilizando, claro, estratégias para isso, como exemplo podemos citar: xadrez, dama, nim [1], dominó, entre outros.

Por outro lado, os de conhecimento são, essencialmente, um recurso para um ensino e uma aprendizagem mais participativa e problematizadora dos temas matemáticos, tais como a geometria analítica. Servem, fundamentalmente, para que os alunos construam, adquiram e aprofundem de maneira mais desafiadora os conceitos e procedimentos desenvolvidos em matemática no ensino médio. O jogo de conhecimento pode ser utilizado em várias circunstâncias: para introduzir um assunto novo, para amadurecer um assunto em andamento ou para concluí-lo ou nos casos em que se proceda a uma revisão. Não importa o momento, ele deve sempre vir acompanhado de questionamentos, reflexões e indagações que o educador pode propor aos alunos.

[1] é um jogo simples de combinatória, existe uma variedade enorme no que concerne à sua conceção e à sua implementação. A teoria por detrás do Nim foi descoberta pelo professor Charles Bouton da Universidade de Harvard em 1901. Bouton queria utilizar o jogo para demonstrar a vantagem do sistema numérico binário e encontrou uma fórmula simples com a qual os jogadores podem determinar os movimentos corretos imediatamente.

A diferença existente entre os jogos de estratégia e de conhecimento está relacionada com o fator sorte. Nos jogos de estratégia, o fator sorte tem pouca ou quase nenhuma interferência. Para vencer o jogo, o participante depende apenas de suas escolhas e decisões, ficando livre para escolher a melhor opção dentro dos limites das regras do jogo. Já nos jogos de conhecimento, os alunos dependem de resultados sorteados em cartas ou dados.

A utilização de jogos matemáticos no ambiente de sala de aula proporciona alguns benefícios elencados a seguir:

- o professor consegue detectar os alunos que estão com dificuldades reais;
- o aluno demonstra para seus colegas e professores se o assunto foi bem assimilado;
- uma competição entre os jogadores e os adversários, pois almejam vencer e para isso aperfeiçoam-se e ultrapassam seus limites;
- no desenrolar de um jogo, é possível observar que o aluno se torna mais crítico, alerta e confiante;
- expressando o que pensa, elaborando perguntas e tirando conclusões sem necessidade da interferência ou aprovação do professor;
- não existe o medo de errar, pois o erro é considerado um degrau necessário para se chegar a uma resposta correta;
- o aluno se empolga com o clima de uma aula diferente, o que faz com que aprenda sem perceber.

O trabalho está assim dividido:

No Capítulo 1 foi feito um breve levantamento histórico sobre os jogos, citando teorias sobre o comportamento lúdico e os jogos nas aulas de matemática no ensino médio.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da geometria analítica abordando os assuntos que fazem parte do estudo programático aplicado na terceira série do ensino médio do Centro de Ensino São Cristóvão.(Este capítulo foi elaborado a partir dos textos extraídos dos livros de matemática citados nas referências bibliográficas).

O Capitulo 3 é constituído a partir de uma metodologia de ensino utilizando jogo matemático sugerido pelo caderno do Mathema do ensino médio.

No capítulo 4 é feito um relato de experiência em sala de aula de um jogo para trabalhar os assuntos de geometria analítica.

1 Jogos educativos

"Os jogos educativos são excelentes ferramentas que o docente pode utilizar no processo ensino aprendizagem, visto que eles contribuem e enriquecem o desenvolvimento intelectual e social do educando. No entanto, compreendemos que os mesmos não podem ser utilizados como únicas estratégias didáticas, pois não garantem a apropriação de todos os conhecimentos esperados" (Leal, Alburquerque e Leite, 2005*).*

1.1 Histórico sobre os jogos

A utilização de jogos na educação não é algo recente, há relatos entre o jogo e o ato de educar, tanto na cultura grega quanto na cultura romana(século IV e III a.C), portanto, a relação existente entre o jogo e a educação pode ser considerada antiga. Embora os primeiros sinais do ato de educar pelo jogo já serem observados nessas civilizações, a noção de jogo como um recurso educativo só começa a ser pensado a partir do século $XVIII$, com a influência do romantismo, estilo literário marcado pelos acontecimentos históricos importantes: as Revoluções Industrial e Francesa[1].

"Se em tempos passados, o jogo era visto como inútil, como coisa não séria, depois do romantismo, a partir do século $XVIII$, o jogo aparece como algo sério e destinado a educar a criança"(Kishimoto, 1994*).*

Na civilização grega, os jogos estavam associados, principalmente, aos espetáculos (teatros e confrontos) e a profissionalização dos atletas que participavam dos concursos, que por sua vez estavam associados à comemoração da morte de um

[1] A partir das revoluções industrial e francesa, formou-se a concepção de mundo contemporâneo, existindo, por parte das duas, uma grande contribuição na parte social, porém ressaltando a influência da revolução industrial na construção de uma organização econômica, e a revolução francesa na construção de uma nova forma política, dessa sociedade ocidental contemporânea.

herói. Essa comemoração realizada regularmente se encontrava fortemente marcada pela religião e tinha como objetivo renovar a energia vital da sociedade e ao mesmo tempo protegê-la.

Segundo Huizinga(2007):

> *"É certo que nos poucos séculos da história grega, em que a competição dominou a vida da sociedade, também presenciaram os grandes jogos sagrados que uniram toda a Hélade em Olímpia, no Istmo, em Delfos e em Neméia".*

Entre os romanos o jogo tinha o sentido geral de treinamento, exercício físico e simulacro[2]. O caráter educativo dos jogos nessa cultura estava atrelado à reprodução dos gestos da realidade cotidiana, como a caça e a guerra, servindo naturalmente para ressaltar os aspectos relativos a essas atividades, e em seguida regulamentá-los. O jogo é visto como recreação desde a antiguidade greco-romana e assim permanece por um longo tempo. Na Idade Média,está associado aos jogos de azar.

Conforme Brougère(1998), antes do jogo assumir um papel de destaque na educação, existiram entre os dois, três principais maneiras de estabelecer relações:

1. O jogo como relaxamento indispensável ao esforço intelectual: isto é, permitia que o aluno estivesse mais relaxado e com menos tensão para as aulas nas quais o esforço intelectual era considerado maior.

2. Jogo estratagema: o interesse da criança pelo jogo era aproveitado em prol de uma boa causa, já que esse não possuía valor educativo em si. Dessa forma, mascarava-se o exercício escolar dando-lhe a forma de jogo.

3. Jogo como revelador e não como formador: essa atividade se configurava como uma forma de observar as habilidades e as dificuldades da criança, para posteriormente serem trabalhadas.

Antes de reconhecerem a importância do jogo na educação, o mesmo era considerado:

[2]Ato pelo qual se simula ir efetuar uma ação que tencionamos não praticar.

> *"[...] demasiadamente como uma atividade fútil, até mesmo nefasta, através das apostas a dinheiro(considerado como o jogo por excelência), para poder encerrar um real valor educativo"(Brougère,* 1998*).*

A primeira noção de jogo e educação é a do relaxamento, que por sinal existe até hoje. A presença do jogo nas escolas ainda assume um papel de coadjuvante no processo educativo, ainda como atividade para descarga de energia. Inúmeras vezes escutam-se dizer dos próprios educadores e pedagogos, que a Educação Física, e por sua vez os jogos, têm o papel de acalmar os alunos, para que voltem mansos e menos tensos para o aprendizado das disciplinas em que o esforço intelectual é necessário.

Nesse sentido:

> *" O jogo é o momento do tempo escolar que não é consagrado à educação, mas ao repouso necessário antes da retomada do trabalho"(Brougère,* 1998*).*

Na segunda relação, o jogo se apresenta como uma forma para seduzir a criança. Dessa maneira, transmitem-se informações de uma maneira divertida e prazerosa, que a criança acredita ser um jogo e não um trabalho, elas não compreendem a importância dos estudos para seu futuro, por isso se faz necessário enganá-las com atividades sedutoras, como no caso dos jogos. Em sua última relação, o jogo é um instrumento utilizado para analisar os alunos. Configura-se como revelador da natureza psicológica real da criança, pois mostram suas inclinações reais quando jogam, isto é, são elas mesmas nos jogos.

Os jogos devem assumir o papel educativo, desta forma, requer um plano de ação que permita a aprendizagem de conceitos matemáticos e culturais de maneira geral. Devido a importância dos jogos em sala de aula, estes devem ser previstos no planejamento, de modo a permitir que o professor possa fazer a exploração total de seu potencial, dos processos de solução, dos registros e das discussões sobre possíveis caminhos que poderão surgir ao longo de sua execução.

1.2 Teorias sobre alguns aspectos do comportamento lúdico

Existem diversas teorias que procuram estudar alguns aspectos particulares do comportamento lúdico.

Piaget(1978) faz uma descrição do jogo durante todo o processo de desenvolvimento da inteligência da criança, mostrando a importância dessa atividade lúdica no processo de desenvolvimento cognitivo, moral e social da mesma. Na interação com os jogos, o indivíduo pode constatar erros, estabelecer estratégias, criar estruturas e assim, construir novos estágios.

Segundo Vygotsky(1989), o lúdico influencia enormemente o desenvolvimento da criança. É através do jogo que a criança aprende a agir, sua curiosidade é estimulada, adquire iniciativa e autoconfiança, proporciona o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração. Ele enfatizava a importância de se investigar as necessidades, motivações e tendências que a criança manifesta e como se satisfaz no jogo, a fim de compreendermos os avanços nos diferentes estágio de seu desenvolvimento. Percebe-se que o ato de brincar é importante, pois possibilita ao indivíduo atuar em um nível cognitivo superior ao seu e isso impulsiona o desenvolvimento, além disso, o observador precisa estar preparado para distinguir nas atitudes das crianças, ações ou procedimentos que demonstrem os sinais dos critérios necessários para uma boa formação cognitiva, e até afetivo-social do aluno.

> *"A criança brinca pela necessidade de agir em relação ao mundo mais amplo dos adultos e não apenas ao universo dos objetos a que ela tem acesso "(Rego,* 2000*).*

Conforme Winnicott(1975), *o brincar facilita o crescimento* e, em conseqüência, promove o desenvolvimento. Uma criança que não brinca não se constitui de maneira saudável, tem prejuízos no desenvolvimento motor e sócio/afetivo. Possivelmente torna-se-á apática diante de situações que proporcionam o raciocínio lógico, a interação, a atenção, etc.

De acordo com Henri Wallon(1925), o jogo é uma atividade voluntária da criança, toda atividade dela é lúdica, portanto se um jogo for imposto a ela, deixa de ser jogo. Wallon classifica os jogos infantis em quatro categorias:

- *Jogos Funcionais:*
  Caracterizam-se por movimentos simples de exploração do corpo, através dos sentidos. A criança descobre o prazer de executar as funções que a evolução da motricidade lhe possibilita e sente necessidade de pôr em ação as novas aquisições, tais como: os sons, quando ela grita, a exploração dos objetos, o movimento do seu corpo. Esta atividade lúdica identifica-se com a "lei do efeito". Quando a criança percebe os efeitos agradáveis e interessantes obtidos nas suas ações gestuais, sua tendência é procurar o prazer repetindo suas ações.

- *Jogos de ficção:*
  Atividades lúdicas caracterizadas pela ênfase no faz-de-conta e na imaginação. Ela surge com o aparecimento da representação e a criança assume papéis presentes no seu contexto social, brincando de imitar adultos, escolinha, casinha e outras situações de seu cotidiano.

- *Jogos de aquisição:*
  Quando a criança se empenha para compreender, conhecer, imitar canções, gestos, sons, imagens e histórias, começam os jogos de aquisição.

- *Jogos de fabricação:*
  São jogos onde a criança realiza atividades manuais de criar, combinar, juntar e transformar objetos. Os jogos de fabricação são quase sempre as causas ou consequências do jogo de ficção, ou se confundem num só. Quando a criança cria e improvisa o seu brinquedo, uma boneca, por exemplo, transforma matéria real em objeto de ficção.

Em sua teoria Wallon diz que é através da imitação que a criança vive o processo de desenvolvimento que é seguido por fases distintas, no entanto, é a quantidade de atividades lúdicas que proporcionarão o progresso, e diante do resultado, temos a impressão que a criança internalizou por completo o aprendizado, mas, ela só comprova seu progresso através dos detalhes.

A teoria de Elkonin(1937) estabelece-se como uma original e genuína Teoria Histórico-Cultural do Jogo. Ao explicar as fases do desenvolvimento individual e evidenciar o papel do adulto, permite estabelecer pressupostos para a organização dessa atividade na Educação Infantil. Desfaz-se a ideia de que o jogo infantil é fruto de impulsos internos ou da tentativa de fugir das imposições do mundo adulto; sua origem está nas relações sociais da criança e é atividade que a insere na sociedade promovendo sua humanização.

Falkemback(2013) destaca alguns elementos que caracterizam os jogos educativos como:

1. a capacidade de absorver o aluno de maneira intensa e total;
2. o envolvimento emocional, pois os jogos têm a capacidade de envolver emocionalmente o participante;
3. os jogos promovem uma atmosfera de espontaneidade e criatividade;
4. a limitação de tempo imposta pelo jogo determina um caráter dinâmico do jogo; possibilita a repetição;
5. o limite do espaço, qualquer que seja o cenário, funciona como um mundo temporário e fantástico;
6. a existência de regras determina o comportamento dos jogadores e isso auxilia o processo de integração social das crianças;
7. o estímulo à imaginação, à auto-afirmação e à autonomia.

Friedmann(1996) cita sete grandes correntes teóricas sobre o jogo, as quais podem ser vistas na tabela a seguir:

Período	**Corrente teórica**	**Descrição sumária**
Final do século XIX	Estudos evolucionistas e desenvolvimentistas	O jogo infantil era interpretado como a sobrevivência das atividades da sociedade adulta
Final do século XIX, começo do século XX	Difusionismo e particularismo: preservação do jogo	Nesta época, percebeu-se a necessidade de preservar os “costumes” infantis e conservar as condições lúdicas. O jogo era considerado uma característica universal de vários povos, devido à difusão do pensamento humano e conservadorismo das crianças.
Década de 20 a 50	Análise do ponto de vista cultural e de personalidade: a projeção do jogo	Neste período ocorrera Neste período ocorreram inúmeras inovações metodológicas para o estudo do jogo infantil, analisando-o em diversos contextos culturais. Tais estudos reconhecem que os jogos são geradores e expressam a personalidade e a cultura de um povo.
Década de 30 a 50	Análise funcional: socialização do jogo	Neste período a ênfase foi dada ao estudo dos jogos adultos como mecanismo socializador.
Começo da Década de 50	Análise estruturalista e cognitivista	O jogo é visto como uma atividade que pode ser expressiva ou geradora de habilidades cognitivas. A teoria de Piaget merece destaque, uma vez que possibilita compreender a relação do jogo com a aprendizagem.
Décadas de 50 à 70	Estudos de Comunicação	Estuda-se a importância da comunicação no jogo.
Década de 70 em diante	Análise ecológica, etológica e experimental: definição do jogo	Nesta teoria foi dada ênfase ao uso de critérios ambientais observáveis e/ou comportamentais. Verificou-se, também, a grande influência dos fabricantes de brinquedos nas brincadeiras e jogos.

Ao longo do tempo surgiram muitas teorias sobre o comportamento lúdicos, mas em qualquer uma delas, pode-se observar que a utilização dos jogos provoca uma mudança de comportamento. A mudança pode ser manifestada, como algum tipo de resposta física, ou pode ser uma mudança de atitude. Todos nós aprendemos o tempo todo, o indivíduo quer seja adulto quer seja criança pode jogar a sua maneira, aproveitando dessa experiência toda a aprendizagem para qual eles estão prontos naquele momento. O lúdico em situações educacionais proporciona um meio real de aprendizagem. No contexto escolar, isso significa professores capazes de compreender onde os alunos estão em sua aprendizagem e desenvolvimento e dá aos professores o ponto de partida para promover novas aprendizagens nos domínio cognitivo e afetivo. Com isso, observamos que o lúdico serve como uma forma para apresentar os conteúdos através de propostas metodológicas no ensino de matemática, fundamentada nos interesses daquilo que pode levar o aluno a sentir satisfação em descobrir um caminho interessante no aprendizado da matemática.

1.3 Os jogos nas aulas de matemática do ensino médio

A parte da educação básica que menos utiliza jogos nas aulas de matemática é, indiscutivelmente, o ensino médio. De fato, a preocupação pelos exames de acesso à educação superior, acaba dificultando a aplicação de jogos como atividade pedagógica. Em muitos casos, devido ao cumprimento integral da carga horária e a extensa relação de conteúdos fazem com que o professor utilize sempre os mesmos recursos didáticos, limitando-se ao uso do livro texto, a utilização de quadro branco, a resolução de listas de exercícios padronizados e a realização de trabalhos na forma de seminário, desmotivando o aluno quanto aos conteúdos da série que são abordados de forma pouco atrativa e significativa, estando estes conteúdos fora de sua realidade e expectativa.

Por outro lado, o uso do jogo é bastante comum no universo pedagógico da educação infantil, primeira fase da educação básica[3], por se tratar de ferramenta

[3]Em seu artigo 21, a LDB afirma: A educação escolar compõe-se : I- educação básica, formada pela educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio; II- educação superior.

bastante apreciada pelos alunos e com finalidades didáticas adaptáveis, a partir das discussões curriculares hoje postas e de alguns avanços, se torna possível discutir dentre uma diversidade de temas específicos a esse nível de ensino, a proposição da sua qualidade e as correlações da mesma, a também qualidade do ensino de matemática.

No contexto da aprendizagem do ensino da matemática o trabalho do professor com a utilização de jogos deve valorizar a sua função pedagógica, ou seja, desencadear a exploração ou aplicação dos conceitos matemáticos. Quando bem planejado e orientado, o trabalho com jogos nas aulas de matemática implicam numa mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem, pois auxiliam no desenvolvimento de habilidades. Os jogos no ensino da matemática têm como um de seus objetivos fazer com que os alunos gostem de aprender e seu uso modifica a rotina da sala de aula, ao mesmo tempo em que desperta a curiosidade e o interesse dos envolvidos.

> *"O jogo representa uma atividade lúdica, que envolve o desejo e o interesse do jogador pela ação do jogo, e mais, envolve a competição e o desafio que motivam o jogador a conhecer seus limites e suas possibilidades de superação de tais limites na busca da vitória, adquirindo confiança e coragem para se arriscar" (Grando,* 2004*).*

No aspecto lúdico, o ato de jogar estimula o espírito construtivo, a imaginação, a capacidade de abstrair, sistematizar e de interagir socialmente. Não se trata apenas de desenvolvimento intelectual, os jogos representam uma forma de socialização, de integração dos educando com o meio e com os colegas e, assim, contribuir para a formação de atitudes por parte dos mesmos. É na interação com os outros que o aluno desenvolve seu potencial de participação, cooperação, respeito com o colega e o senso crítico sobre as próprias ideias em relação às dos demais colegas.

> *"o jogo deverá ter e propor situações interessantes e desafiadoras para os jogadores; o jogo deverá permitir a auto-avaliação do desempenho do jogador; o jogo deverá permitir a participação ativa de todos os jogadores durante todo o jogo"(Kamii e Devries,* 1991*).*

Ao jogar, os alunos têm a oportunidade de solucionar problemas, investigar e descobrir a melhor jogada, refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre os conceitos matemáticos e os elementos constituintes do jogo. Neste contexto, o aluno, elabora suas próprias estratégias para resolver o problema, ou seja, vencer o jogo. De acordo com Moura (1992), o jogo e resolução de problemas são abordados como produtores de conhecimento e possibilitadores da aquisição de conhecimentos matemáticos.

Dessa forma, o aluno se ver compelido a desenvolver maneiras próprias e diferentes de jogar na intenção de resolver os problemas existentes, elaborando, então, novos conhecimentos. Portanto, o jogo passa a assumir uma perspectiva de desenvolvimento das habilidades de resolver problemas, possibilitando a oportunidade de estabelecer planos próprios de ação, executando jogadas que podem ser analisadas, avaliadas com eficácia. Assim, pontua Moura (1991):

> *"Temos alguns indicadores que nos permitem inferir que estamos começando a sair de uma visão de jogo, como puro material institucional para incorporá-lo ao ensino, tornando-o mais lúdico e propiciando o tratamento dos aspectos afetivos que caracterizam o ensino e a aprendizagem como atividade. "*

Na resolução de problemas, faz-se necessária uma nova postura pedagógica do professor, exigindo uma atitude de maior questionamento diante de um problema. Desta forma, o observado não é puramente a reposta correta do problema proposto, mas, sobretudo o processo de resolução que permite o surgimento de diferentes soluções que podem ser comparadas entre si. É conveniente destacar que resolver problemas não significa simplesmente compreender o proposto e apresentar soluções, aplicando técnicas e fórmulas adequadas, mas, principalmente, despertar no aluno uma atitude de investigação e compreensão diante do que está sendo explorado. Assim, apresentar uma resposta correta, aceitável e convincente não garante a apropriação do conhecimento envolvido no problema pelo aluno. Sendo assim, além de fornecer respostas, é fundamental testar seus efeitos e comparar diferenças de solução. Os alunos devem enxergar resoluções alternativas e ter experiência na resolução de problemas com mais de uma solução.

"Ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Nós, como educadores matemáticos, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas "(Oliveira, 2007*).*

Associado à dimensão lúdica, temos a dimensão educativa da aplicação do jogo. A utilização do jogo, como recurso didático, favorece o desenvolvimento da linguagem, os diferentes processos de raciocínio e de interação entre os alunos, já que na execução de uma partida cada jogador pode acompanhar o trabalho dos demais, sustentar pontos de vista e aprender a ser crítico, tornando-se mais confiante em si mesmo.

A atividade envolvendo jogo modifica o ambiente de sala de aula onde naturalmente existe material didático e escolar abre espaço para o movimento, barulho, alegria e descontração estimulando conhecimento, reflexão, observação, tomada de decisão, argumentação e organização, os quais são estreitamente relacionados ao raciocínio lógico. Por isso, concordamos com os PCN (1997, p.36) que é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver, independentemente do nível escolar que o aluno esteja inserido.

Fugir do tradicionalismo no ensino médio representa uma alteração estrutural no modo de pensar e de agir, portanto é necessário que o professor de matemática se torne um ser que busque novas fundamentações básicas. Entretanto, este processo não é imediato, é progressivo e requer muita persistência e propósitos definidos, porém diante de tanta dificuldade é preciso ousar, planejar de novo, inovar e acreditar no seu potencial e no de cada educando. Para tanto, o professor precisa modificar sua postura profissional, afinal há uma enorme diferença entre as aulas expositivas e as aulas baseadas em jogos. À princípio, encontrará dificuldade e muita resistência, contudo é preciso orientar os educandos para a nova proposta de estudo, despertando-lhes a responsabilidade e a necessidade de organização para a nova metodologia.

"Por meio de atividades lúdicas, que proporcionem prazer e participação, o aluno é motivado a desenvolver suas próprias ações, ou seja, agir diante de novas circunstâncias, o que representa um estado de autocontrole e aprendizagem. Contudo, o ensino da matemática, em sala de aula, pode assumir uma postura construtivista, onde o educador e o educando possam interagir em busca do conhecimento"(Giancaterino, 2009).

2 Conteúdos trabalhados na Geometria Analítica

Neste capítulo é apresentado os aspectos gerais dos conteúdos tratados nas experiências narradas neste trabalho.

Diversos autores consideram o início do estudo da geometria analítica como um dos maiores progressos da matemática. A geometria analítica ou geometria com coordenadas tem entre suas características a realização de conexões entre a geometria e a álgebra, permitindo interpretações geométricas de fatos algébricos e o estudo algébrico de fatos geométricos, pois, por exemplo, permite compreender as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio de retas em um plano, ou então, representar por meio de uma equação uma figura no plano $\mathbb{R}^2$ ou no espaço $\mathbb{R}^3$.

Não há consenso sobre quando se deu início ao estudo da geometria analítica. Enquanto alguns historiadores defendem que práticas que levam a esse ramo da matemática já eram do conhecimento de gregos, egípcios e romanos, outros creditam aos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, o estudo sistemático dessa área de conhecimento. Por volta de 300 anos a.C, Euclides de Alexandria sistematizou a geometria em sua obra **Os Elementos**, que é a base para os estudos geométricos até os dias atuais. A álgebra iniciou com os estudos de Diofanto, por volta de 300 anos depois de Cristo e culminou com Al-Khowarizmi, 800 anos depois de Cristo, com sua obra Algebrae (Al-Jabr). Contudo não existia uma simbologia adequada para representar uma expressão algébrica.

No século $XVII$, Pierre de Fermat($1601 - 1665$) descobriu as equações da reta, da circunferência, e as equações mais simples da elipse, parábola e da hipérbole, trabalhava paralelamente e independentemente de Descartes.

René Descartes($1596 - 1650$), contemporâneo de Fermat, o superou pela utilização de uma notação algébrica mais prática. A maior contribuição de Descartes foi publicada em sua famosa obra, **Discurso Sobre o método** , datada de 1637.

Esta obra funda o racionalismo moderno, defende o uso da razão matemática na condução das ciências, em detrimento das práticas puramente experimentais e afirma que todos os homens têm, por natureza, a mesma razão e a capacidade de pensar com lógica. A máxima "Penso, logo existo ", que Descartes formulou no livro, se tornou uma das mais célebres da filosofia, valendo citações até os dias de hoje. Discurso sobre o método era acompanhada de três apêndices, sendo que o último deles, intitulado **La Geométrie**, apresenta as ideias que fundamentaram o estudo da geometria analítica.

2.1 Sistema cartesiano ortogonal

O *Sistema cartesiano ortogonal* é constituído por dois eixos x e y, perpendiculares entre si. O eixo horizontal é o eixo das abscissas (eixo Ox) e o eixo vertical é o eixo das ordenadas (eixo Oy). O plano que contém Ox e Oy é denominado de plano cartesiano.

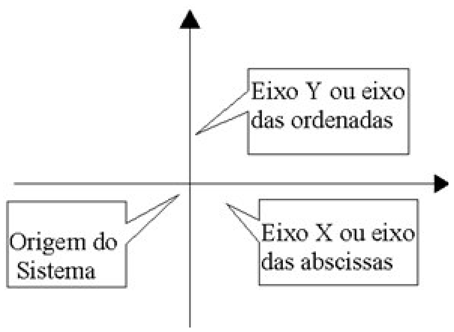


Figura 2.1: Sistema cartesiano ortogonal

2.2 Quadrantes

O eixo das abscissas e o eixo das ordenadas denominados eixos coordenados, intersectam na origem formando quatro regiões distintas denominadas quadrantes. A contagem dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pares que possuem ambas as coordenadas positivas.

Observação 2.2.1. :

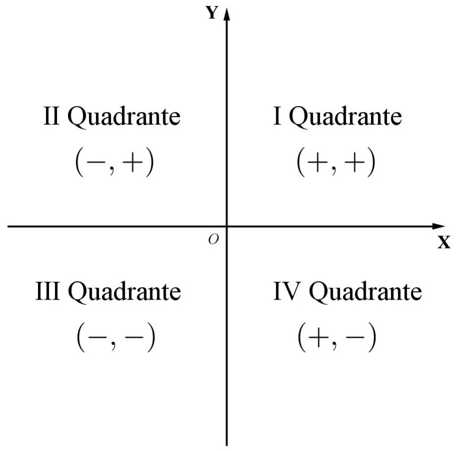


Figura 2.2: Os quadrantes

- À direita do eixo das ordenadas, temos a parte positiva do eixo das abscissas (semieixo positivo das abscissas) e à esquerda, temos a parte negativa do eixo das abscissas (semieixo negativo das abscissas).
- Acima do eixo das abscissas, temos a parte positiva do eixo das ordenadas (semi-eixo positivo das ordenadas) e abaixo, temos a parte negativa do eixo das ordenadas (semieixo negativo das ordenadas)

2.3 Pares Ordenados

Para determinarmos as coordenadas de um ponto P qualquer, devemos traçar uma reta paralela ao eixo y passando por x_P e uma reta paralela ao eixo Ox passando por y_P, a intersecção destas retas representa graficamente o par ordenado $P(x_P, y_P)$.

2.3.1 Propriedades dos Pares Ordenados

Par ordenado no eixo das abscissas.

Um par ordenado pertencente ao eixo das abscissas apresenta ordenada nula. Assim, para todo x_P, o ponto $(x_P, 0)$ pertence ao eixo Ox, se $x_P > 0$ está localizado no semieixo positivo das abscissas, se $x_P < 0$, está localizado no semieixo negativo das abscissas.

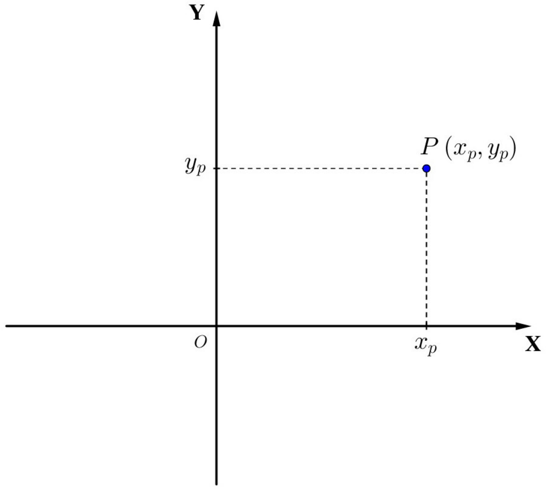


Figura 2.3: Par ordenado

Exemplo 2.3.1. O par ordenado $(3, 0)$ está localizado no semieixo positivo das abscissas e o par ordenado $(-3, 0)$ localizado no semieixo negativo das abscissas.

Par ordenado no eixo das ordenadas.

Um par ordenado pertencente ao eixo das ordenadas apresenta abscissa nula. Assim, para todo y_P, o ponto $(0, y_p)$ pertence ao eixo Oy, se $y_P > 0$ está localizado no semieixo positivo das ordenadas, se $y_P < 0$, está localizado no semieixo negativo das ordenadas.

Exemplo 2.3.2. O par ordenado $(0, 3)$ está localizado no semieixo positivo das ordenadas e o par ordenado $(0, -3)$ localizado no semieixo negativo das ordenadas.

Par ordenado na bissetriz dos quadrantes ímpares (BQI).

Todo par ordenado localizado na bissetriz dos quadrantes ímpares apresenta abscissa igual a ordenada e vice-versa.

Exemplo 2.3.3. Os pares ordenados $(3, 3)$ e $(1, 1)$ são pares do primeiro quadrante localizados na BQI e os pares $(-3, -3)$ e $(-1, -1)$ são pares do terceiro quadrante localizados na BQI .

Par ordenado na bissetriz dos quadrantes pares (BQP).

Todo par ordenado localizado na bissetriz dos quadrantes pares apresenta abscissa oposta a ordenada e vice-versa.

Exemplo 2.3.4. Os pares ordenados $(-3, 3)$ e $(-1, 1)$ são pares do segundo quadrante localizados na BQP e os pares $(3, -3)$ e $(1, -1)$ são pares do quarto quadrante localizados na BQP .

2.4 Estudo do Ponto

2.4.1 Distância entre dois Pontos

Dados dois pontos distintos A e B do plano cartesiano, denomina-se distância entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades. Indicaremos a distância entre A e B por $d(A, B)$.

1. O segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.

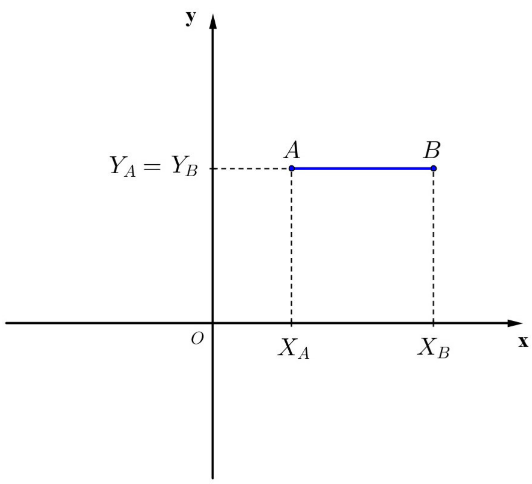


Figura 2.4: O segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas

A distância entre A e B é dado pelo módulo da diferença entre as abscissas de A e B, isto é:

$$d(A, B) = |x_A - x_B|$$

2. O segmento AB é paralelo ao eixo das ordenadas.

A distância entre A e B é dado pelo módulo da diferença entre as ordenadas de A e B, isto é:

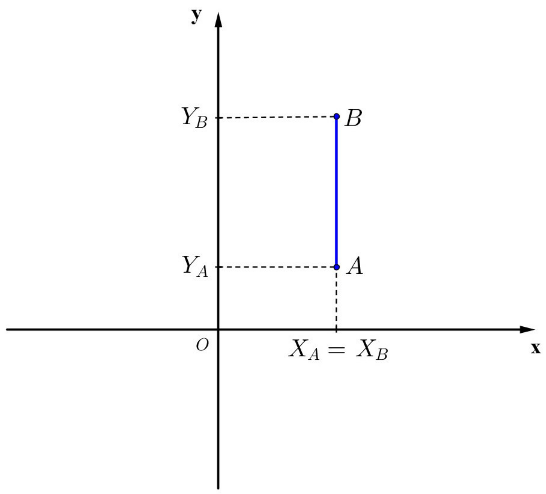


Figura 2.5: O segmento AB é paralelo ao eixo das ordenadas

$$d\,(A, B) = |y_A - y_B|$$

3. O segmento AB não é paralelo a nenhum dos eixos ordenados.

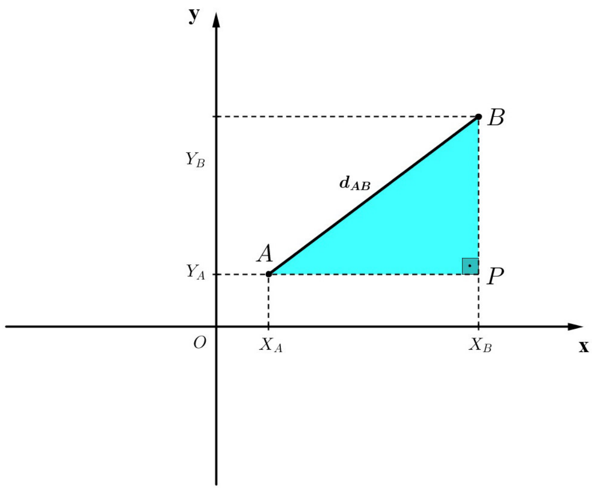


Figura 2.6: O segmento AB não é paralelo a nenhum dos eixos ordenados

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo APB, temos:

$$\begin{aligned} d^2\,(A, B) &= d^2\,(A, P) + d^2\,(B, P) \\ &= (|x_A - x_B|)^2 + (|x_A - x_B|)^2 \\ &= (x_A - x_B)^2 + (x_A - x_B)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

Podemos observar ainda que, como $(x_A-x_B)^2=(x_B-x_A)^2$ e $(y_A-y_B)^2=(y_B-y_A)^2$, a ordem das diferenças que aparecem no radicando não importa.

Assim, pode-se escrever, também :

$$d(A,B)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

como Δx representando a diferença entre as abscissas dos pontos, e Δy, a diferença entre as ordenadas dos pontos.

Exemplo 2.4.1. Calcular a distância entre os pontos $A(-4,3)$ e $B(2,-5)$.

Solução :

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-4-2)^2+(3-(-5))^2} \\ &= \sqrt{(-4-2)^2+(3+5)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2+(8)^2} \\ &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10. \end{aligned}$$

2.4.2 Ponto médio de um segmento

Definição 2.4.1. Ponto que divide o segmento em duas partes iguais.

As coordenadas do ponto médio de um segmento de reta do plano são as médias aritméticas das coordenadas dos extremos deste segmento.

Demonstração. Sejam $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$ pontos arbitrários do plano cartesiano e $M(x_M,y_M)$ seu ponto médio. Assim, por hipótese, é válida a seguinte relação

$$\frac{AM}{MB}=1.$$

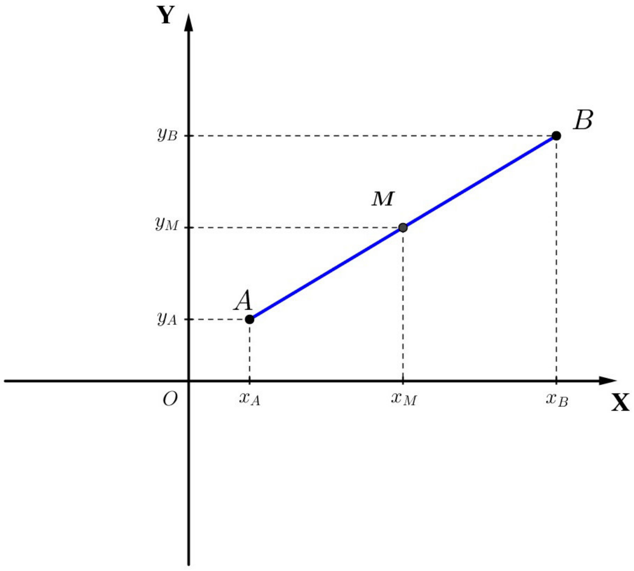


Figura 2.7: Ponto médio de um segmento

Ademais, pelo teorema de Tales, é fácil verificar que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = \frac{y_M - y_A}{y_B - x_M} = 1,$$

$$\frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y_M - y_A}{y_B - x_M} = 1,$$

isto é,

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad \text{e} \quad y_M - x_A = y_B - x_M,$$

o que nos diz que :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Portanto, o ponto médio é dado por $M = (x_M, y_M)$. □

Exemplo 2.4.2. Obter o ponto médio do segmento AB de extremidades $A(3,-1)$ e $B(-7,11)$.

Solução :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + (-7)}{2} = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Então $M = (-2, 5)$.

2.4.3 Mediana e baricentro de um triângulo

Em um triângulo, as medianas correspondem aos segmentos de reta cujas extremidades são o ponto de um dos lados e o vértice oposto a esse lado. As três medianas do triângulo se cruzam em um único ponto denominado *baricentro* e simbolizado por G. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos, sendo que aquele cujas extremidades são o vértice do triângulo e o baricentro tem o dobro do comprimento do outro segmento, do baricentro ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

No triângulo ABC apresentado, temos $AG = 2GM_a$, $BG = 2GM_b$ e $CG = 2GM_c$.

Dados três pontos não colineares $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, podemos determinar as coordenadas do baricentro G do triângulo ABC.

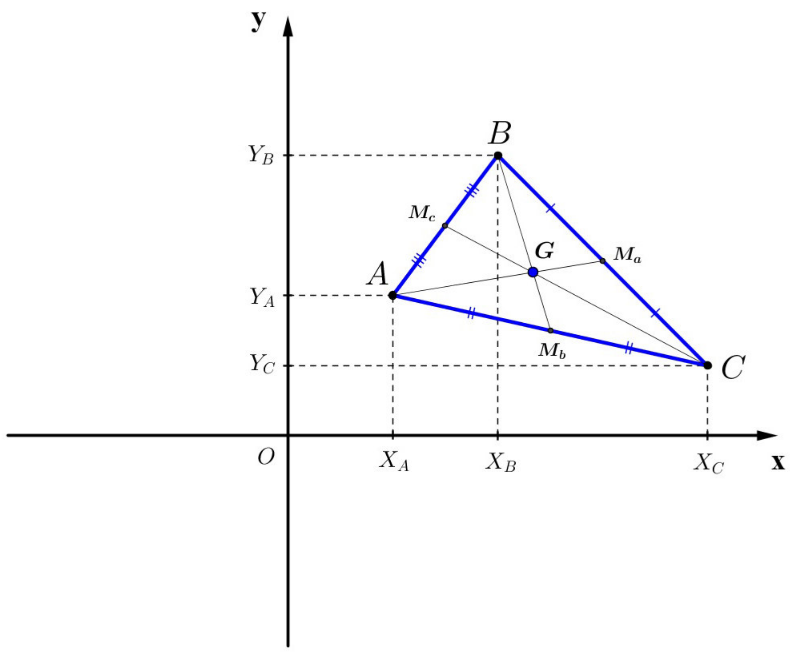


Figura 2.8: Baricentro de um triângulo

Se M é o ponto médio de AB, temos $M = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, ou seja, $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. Além disso, da propriedade apresentada, temos que CG=$2GM_c$, ou seja, $x_C - x_G = 2(x_G - x_M)$ e $y_C - y_G = 2(y_G - y_M)$.
Assim, segue que:

- $x_C - x_G = 2(x_G - x_{Mc}) \Rightarrow x_C - x_G = 2x_G - 2x_{Mc} \Rightarrow 2x_{Mc} + x_C = 3x_G \Rightarrow 2(\frac{x_A + x_B}{2}) + x_C = 3x_G \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 3x_G \Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$
- Da mesma forma para o eixo das ordenadas, temos: $y_C = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Assim, as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC é dada por:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right),$$

isto é, as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC correspondem às médias aritméticas das coordenadas dos vértices A, B e C.

2.4.4 Condição de alinhamento de três pontos

Quando três ou mais pontos estão alinhados, ou seja, quando é possível construir uma reta passando por eles, dizemos que esses pontos são colineares.
A partir das coordenadas de três pontos, é possível verificar se eles são colineares. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, indicados no plano cartesiano.

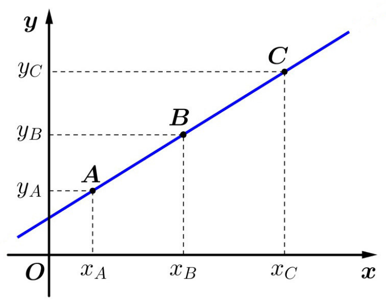


Figura 2.9: Condição de alinhamento de três pontos

Se A, B e C são colineares, segundo o Teorema de Tales[1]:

- $\frac{AB}{AC} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A}$

[1] De acordo com o Teorema de Tales, se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$

Assim, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$$

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) = (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A).$$

Desenvolvendo essa expressão, obtemos:

$$x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A = x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A$$

$$x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B - x_A y_A = 0$$

$$x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B = 0.$$

Esta última expressão pode ser escrita sob a forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.5 Estudo da reta

2.5.1 Formas da equação da reta

Equação geral

Dada uma reta r, podemos determinar pelo menos uma equação do tipo $ax + by + c = 0$ denominada *equação geral da reta* r, a qual é satisfeita por todos os pontos $P(x_P, y_P)$ pertencentes à reta r.

Equação reduzida

Dada a equação geral da reta, $ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos:

$$by = -ax - c \Longrightarrow y = \underbrace{(-\frac{a}{b})}_{m} \cdot x + \overbrace{(-\frac{c}{b})}^{q} \Longrightarrow y = mx + q$$

Esta última equação expressa y em função de x, é denominada *equação reduzida da reta* r.

Equação segmentária

Considerando uma reta r que intercepta os eixos cartesianos nos pontos $P(p, 0)$ e $Q(0, q)$ distintos $(p, q \neq 0)$.

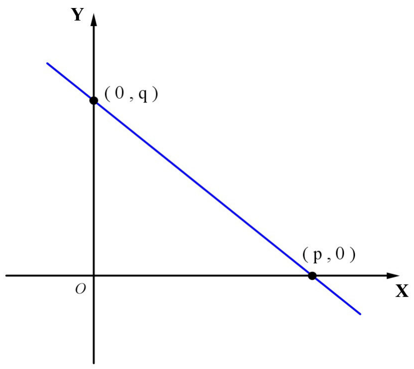


Figura 2.10: Equação segmentária da reta

A equação desta reta é :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} qx + py - pq &= 0 \\ qx + py &= pq \quad (\div pq) \\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} &= 1. \end{aligned}$$

denominada *equação segmentária da reta* .

Exemplo 2.5.1. Obter a equação geral da reta que intercepta os eixos em $P(3,0)$ e $Q(0,-2)$.
A equação segmentária é $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$ e a equação geral é obtida tirando o mmc entre os denominadores e efetuando as devidas operações: $\dfrac{2x}{6}+\dfrac{(-3y)}{6}=1 \Rightarrow 2x-3y=6$ $\Rightarrow 2x-3y-6=0$.

Equação paramétrica

As equações geral, reduzida e segmentária relacionam diretamente entre si as coordenadas (x,y) de um ponto genérico da reta. É possível, entretanto, fixar a lei a ser obedecida pelos pontos da reta dando as coordenadas x e y de cada ponto da reta em função de uma terceira variável t, denominada *parâmetro* .

As equações $x=f_1(t)$ e $y=f_2(t)$ que dão as coordenadas (x,y) de um ponto qualquer da reta em função do parâmetro t, são chamadas *equações paramétricas da reta.*

Exemplo 2.5.2. Obter as equações geral, reduzida e segmentária da reta definida por $x=3t-4$ e $y=2-3t$.
Isolando o parâmetro t nas duas equações: $t=\dfrac{x+4}{3}$ e $t=\dfrac{y-2}{-3}$
como $t=t$, tem-se: $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-2}{-3}$.
Utilizando proporção, obtem-se: $-3(x+4)=3(y-2)$.
Dividindo por 3, obtemos: $-(x+4)=(y-2)$.
E encontramos: $-x-4=y-2$.
A partir desta equação pode-se obter as equações solicitadas.

- Equação geral: $-x-y-4+2=0 \Rightarrow -x-y-2=0 \Rightarrow x+y+2=0$;
- Equação reduzida : $y=-x-2$;
- Equação segmentária : $x+y=-2 \Rightarrow \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-2}=1$.

2.5.2 Coeficiente angular da reta (m)

Em relação ao eixo das abscissas, uma reta forma um ângulo indicado por α, denominado *ângulo de inclinação da reta.* A tangente trigonométrica deste ângulo de inclinação ($\tan\alpha$) é denominada *coeficiente angular da reta.* Em uma reta

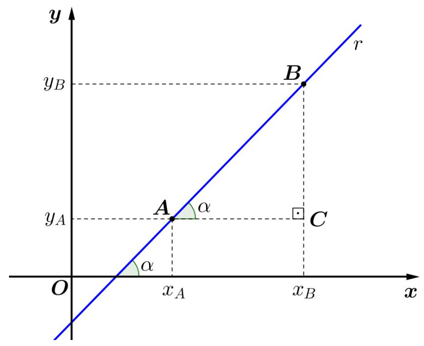


Figura 2.11: Coeficiente angular da reta (m)

r, não paralela ao eixo-y, que contém os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, temos que o coeficiente angular é dado por:

$$\tan\alpha = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2.5.3 Equação da reta conhecendo um ponto e o coeficiente angular

Ao definir um ponto $A(x_0, y_0)$ no plano cartesiano e um coeficiente angular m, pode-se determinar a reta r que passa pelo pont A e tem m como coeficiente angular.

Para obter a equação dessa reta r, considera-se um ponto $P(x, y)$ qualquer distinto de $A(x_A, y_A)$ e pertencente a r.

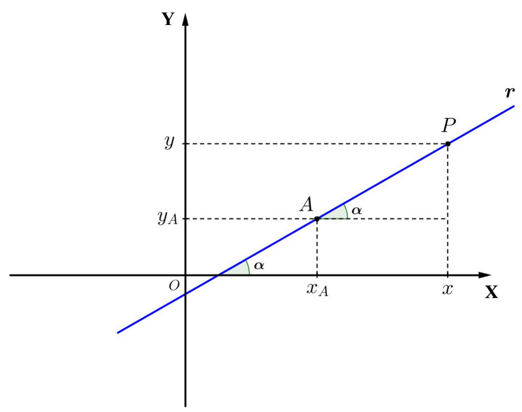


Figura 2.12: Equação da reta conhecendo um ponto e o coeficiente angular

Do triângulo APC, temos:

$$\tan\alpha = \frac{CP}{AC} \Longrightarrow m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Longrightarrow y - y_A = m(x - x_A)$$

Portanto, a equação da reta r é dada por $y - y_A = m(x - x_A)$.

Exemplo 2.5.3. A equação de uma reta que passa pelo ponto $A(3, -4)$ e tem coeficiente angular -2 é dada por :
$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - (-4) = -2(x - 3) \Rightarrow y + 4 = -2x + 6 \Rightarrow y = -2x + 2.$

2.5.4 Interseção de duas retas

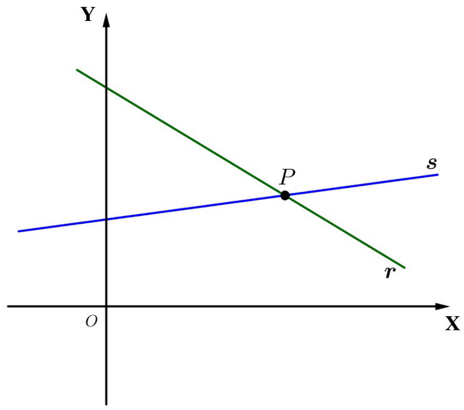


Figura 2.13: Ponto de interseção de duas retas

Todo ponto de interseção de duas retas tem de satisfazer as equações destas retas. Portanto, para obtermos o ponto de interseção $P(x_0, y_0)$ de duas retas concorrentes (apresentam ponto em comum), basta resolver o sistema formado pelas suas equações :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Exemplo 2.5.4. Obter o ponto de interseção das retas r $2x + y - 3 = 0$ e s $3x - y - 2 = 0$.
Solução:
Podemos resolver o sistema formado pelas equações das retas pelo método da substituição. Isolando y na equação de s temos, $y = 3x - 2$ e substituindo na equação de r, obtemos $2x + 3x - 2 - 3 = 0$, $5x = 5$, $x = 1$. Substituindo $x = 1$ em $y = 3x - 2$,

temos $y = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$.

Portanto, o ponto de interseção das retas r e s é o ponto $P(1,1)$.

2.5.5 Posições relativas de duas retas

Sejam duas retas r e s, cujas equações são definidas por

$$\begin{cases} r : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (I) \\ s : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (II) \end{cases}.$$

Estas podem ocupar, no plano cartesiano, uma e apenas uma das três posições relativas dadas abaixo:

- As retas r e s são retas concorrentes apresentam um único ponto em comum;
- As retas r e s são retas paralelas e distintas não apresentam pontos em comum;
- As retas r e s são retas coincidentes apresentam vários pontos em comum.

Podemos também estabelecer relações entre os coeficientes das retas r e s, sendo assim, temos:

- Retas r e s concorrentes $\iff \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$;
- Retas r e s paralelas e distintas $\iff \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;
- Retas r e s coincidentes $\iff \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Exemplo 2.5.5. Qual a posição relativa entre as retas $9x - 3y - 10 = 0$ e $6x - 2y - 15 = 0$.

Solução:

sendo $a_1 = 9, b_1 = -3$ e $c_1 = -10$, os coeficientes da reta r $9x - 3y - 7 = 0$ e $a_2 = 6, b_2 = -2$ e $c_2 = 15$, os coeficientes da reta s $6x - 2y + 17 = 0$, temos as seguintes relações :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}$$

como $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, isto é, $\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{2}{3}$, podemos concluir que as retas r e s são paralelas e distintas.

2.5.6 Condição de paralelismo de duas retas

Duas retas r_1 e r_2, não-verticais, são paralelas entre si, se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais.

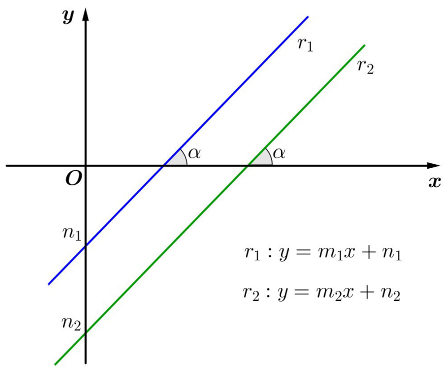


Figura 2.14: Retas paralelas

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Longleftrightarrow \tan\alpha_1 = \tan\alpha_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2$$

2.5.7 Condição de perpendicularismo de duas retas

Duas retas r e s, não-verticais, são perpendiculares se, e somente se,o produto de seus coeficientes angulares é -1, isto é,

$$m_r \cdot m_s = -1.$$

2.5.8 Ângulo de duas retas

A medida do ângulo agudo θ formado por duas retas concorrentes r e s é tal que:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|,$$

em que m_r e m_s são, respectivamente, os coeficientes angulares de r e s e nenhuma delas é vertical.

Se uma das retas é vertical, isto é, paralela ao eixo das ordenadas, obteremos a medida do ângulo agudo através da relação:

$$\tan\theta = \left|\frac{1}{m}\right|,$$

sendo m o coeficiente angular da reta não-vertical.

2.5.9 Distância entre ponto e reta

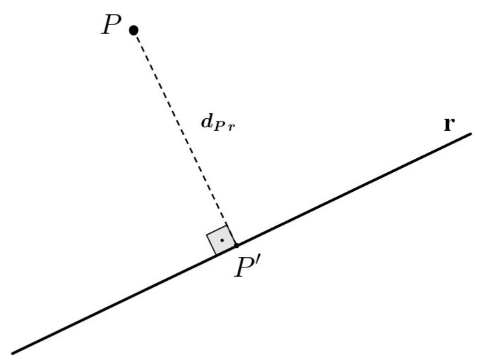


Figura 2.15: Distância entre ponto e reta

Para calcularmos a distância d entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, utilizamos a expressão:

$$d = \left|\frac{ax_0 + by_o + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|.$$

Exemplo 2.5.6. Calcular a distância entre o ponto $P(1, 6)$ e a reta $4x+3y-2 = 0$. Solução:

$$d = \left|\frac{ax_0 + by_o + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{4.1 + 3.6 - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{4 + 18 - 2}{\sqrt{9 + 16}}\right| = \left|\frac{20}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{20}{5}\right| = |4| = 4.$$

2.5.10 Área de um triângulo

Calculemos a área de um triângulo ABC, de vértices $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

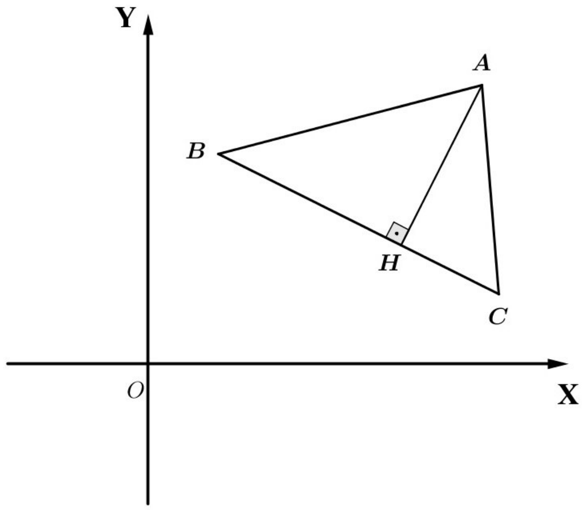


Figura 2.16: Área de um triângulo

- (I) Lembrando a fórmula da área do triângulo da geometria Plana:

$$\acute{a}rea = \frac{base \cdot altura}{2}$$

Temos: área $= \dfrac{BC \cdot AH}{2}$

- (II) Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos:

$$BC = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

- (III) A equação geral da reta BC é :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \underbrace{(y_B - y_C)}_{a} \cdot x + \underbrace{(x_C - x_B)}_{b} \cdot y + \underbrace{(x_B y_C - x_C y_B)}_{c} = 0$$

- (IV) Cálculo da distância do ponto A à reta BC:

$$d = \left| \frac{a x_A + b y_A + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Então:

$$AH = d = \left|\frac{(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_2 y_C - x_C y_B}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_3 - x_2)^2}}\right| = \frac{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_B - y_C)^2}}$$

- (V) Indicando $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$,temos:

$$\text{área} = \frac{BC.AH}{2} = \frac{1}{2}.\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.\frac{|D|}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

Portanto, a área da superfície limitada por um triângulo ABC, de vértices $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 2.5.7. Determine a área do triângulo de vértices $A(-6, 0)$, $B(3, -2)$ e $C(1, 4)$.

Solução:

$$\text{D} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 12 + 2 + 24 - 0 = 50$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}.|D| = \frac{1}{2}.|50| = \frac{1}{2}.50 = 25$$

2.6 Estudo da circunferência

2.6.1 Equação reduzida da circunferência

A circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é o conjunto dos pontos do plano cartesiano que distam r unidades do ponto C. Assim, a condição para que o

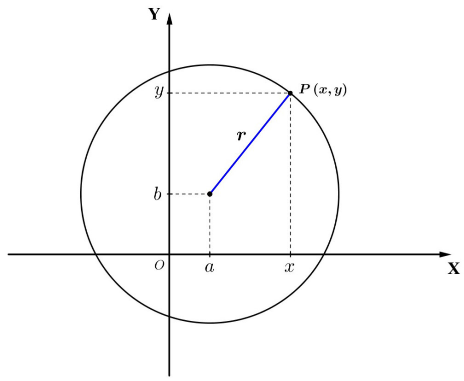


Figura 2.17: Equação reduzida da circunferência

ponto $P(x, y)$ esteja na curva (pertença à circunferência) é :

$$\begin{aligned} d(P, C) &= r \\ \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} &= r \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Esta equação é denominada de equação reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r.

2.6.2 Equação geral da circunferência

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência, obtemos:

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Esta equação é conhecida como equação geral da circunferência com centro $C(a, b)$ e raio r.

2.6.3 Posição relativa entre ponto e circunferência

Se tivermos um ponto $P(x_0, y_0)$ e a equação reduzida de uma circunferência λ, de centro $C(a, b)$ e raio r, as possíveis posições relativas de P e λ são:

1. O ponto pertence à circunferência.

   Neste caso, as coordenadas do ponto devem satisfazer à equação da circunferência, e a distância entre P e C é igual ao raio.

2. O ponto é externo à circunferência.

   Neste caso, a distância do ponto ao centro é maior que o raio.

3. O ponto é interno à circunferência.

   Neste caso, a distância do ponto ao centro é menor que o raio.

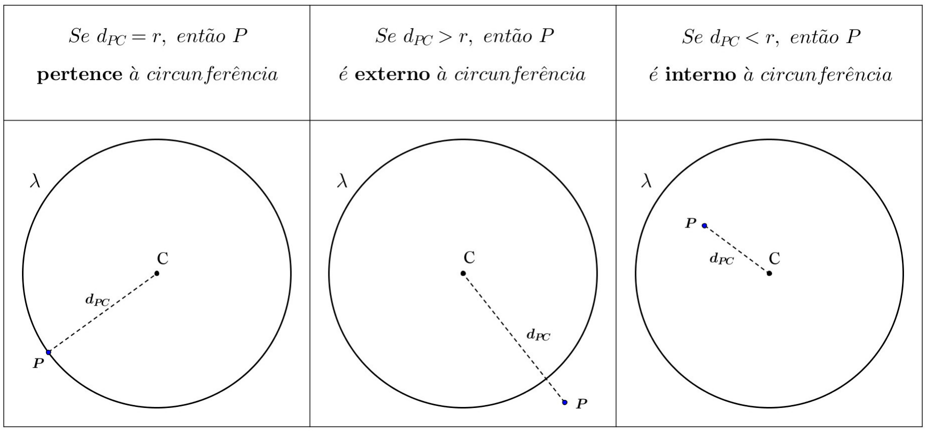


Figura 2.18: Posição relativa entre ponto e circunferência

2.6.4 Posição relativa entre reta e circunferência

Dadas uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ e uma circunferência λ de equação reduzida $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, determinar a interseção de r com λ é determinar os pontos $P(x, y)$ que pertencem às duas curvas.

É imediato que, se $P \in r$ e $P \in \lambda$, então P satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} r \qquad ax + by + c = 0 \quad (I) \\ \lambda \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (II) \end{cases}.$$

que pode ser facilmente resolvido pelo método da substituição. A posição relativa entre reta e circunferência é determinada pelo número de soluções do sistema que pelo método da substituição ,reduz a equação da circunferência a uma equação de 2ª grau a uma única variável.

É o discriminante Δ dessa equação que define o número de soluções do sistema e, portanto, a posição da reta em relação à circunferência. Sendo assim, se:

- $\Delta > 0 \Longleftrightarrow$ *secantes* (há dois pontos em comum)
- $\Delta = 0 \Longleftrightarrow$ *tangentes* (há um único ponto em comum)
- $\Delta < 0 \Longleftrightarrow$ *exteriores* (não há ponto em comum)

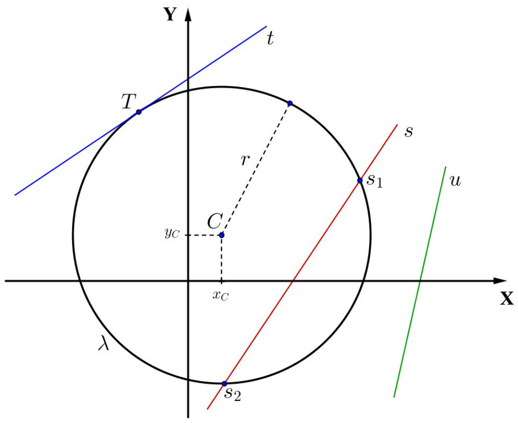


Figura 2.19: Posição relativa entre reta e circunferência

2.6.5 Posição relativa entre duas circunferências

Sejam duas circunferências:

$$\begin{cases} \lambda_1 & (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 & = & r_1^2 & (I) \\ \lambda_2 & (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 & = & r_2^2 & (II) \end{cases}$$

Encontrar a interseção de λ_1 e λ_2 é determinar os pontos $P(x, y)$ que pertencem às duas curvas. Se $P(x, y)$ pertence a λ_1 e λ_2, então P satisfaz o sistema que pode ser resolvido da seguinte forma:

1. Efetua-se a subtração membro a membro das equações;
2. Isola-se uma das variáveis da equação do 1º grau obtida e substitui-se em uma das duas equações do sistema.

   A posição relativa de duas circunferências é determinada comparando as distâncias entre os centros das circunferências com a soma dos dois raios ou com o módulo da diferença entre os raios. Assim, duas circunferências distintas podem ter dois, um ou nenhum ponto em comum.

2.7 Estudo das Cônicas

Consideremos um cone circular reto e um plano que o intercepta. Da posição deste plano relativamente ao cone, a secção obtida na superfície lateral pode ser uma circunferência, uma elipse ou uma parábola. Se considerarmos dois cones iguais e opostos pelo vértice, e o plano secante paralelo a duas geratrizes, obteremos na superfície lateral dos dois cones a curva constituída por dois ramos chamada hipérbole.

As curvas elipse, parábola e hipérbole são denominadas de cônicas.

2.7.1 Elipse

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles e O o ponto médio de F_1F_2. Chamamos Elipse ao conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ $(2a > 2c)$.

$$elipse = [P \in \alpha / PF_1 + PF_2 = 2a].$$

Elementos principais:

F_1 e F_2: Focos

O: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo maior

$\overline{B_1B_2}$: eixo menor

$2c$: distância focal

$2a$: medida do eixo maior

$2b$: medida do eixo menor

$\dfrac{c}{a}$: excentricidade

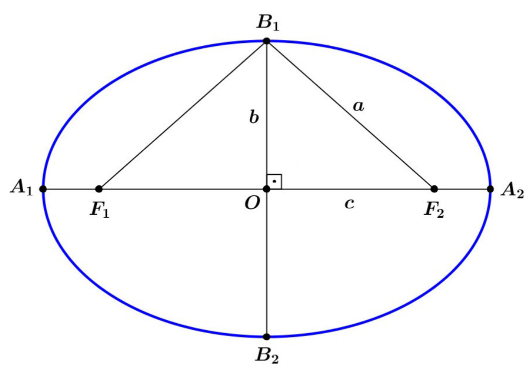


Figura 2.20: Elementos da elipse

Numa elipse, a medida do semieixo maior a, a medida do semieixo menor b e a metade da distância focal c verificam a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que decorre do Teorema de Pitágoras aplicado ao $\triangle OF_2B_1$.

Equação da elipse com centro na origem

Fixando um sistema de coordenadas cujos eixos contêm os eixos da elipse, obteremos a equação da elipse. Há dois casos a serem considerados.

- Caso 1: eixo maior da elipse sobre o eixo das abscissas

  Considere uma elipse com centro O na origem do sistema cartesiano, eixo maior de coordenadas $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, com $a > 0$, eixo menor $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$, com $b > 0$ e focos$F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, com$c > 0$. Tomaremos um ponto P qualquer sobre essa elipse, com coordenadas (x, y).

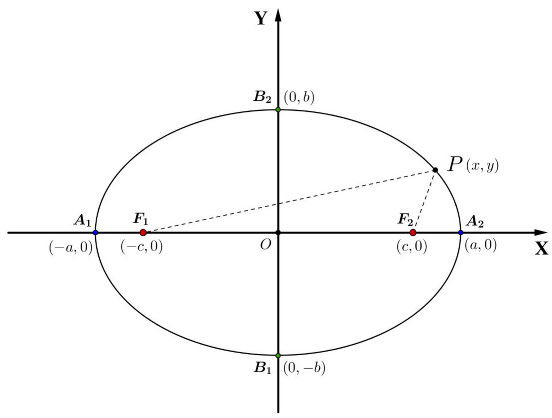


Figura 2.21: Eixo maior da elipse sobre o eixo das abscissas

Utilizaremos a fórmula da distância entre dois pontos para obter a equação da elipse.

Como $PF_1 + PF_2 = 2a$, temos:

$$\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$\begin{aligned}
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\
x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\\
4cx-4a^2 &= -4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\quad (\div 4)\\
cx-a^2 &= -a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\\
\left[cx-a^2\right]^2 &= \left[-a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right]^2
\end{aligned}$$

Desenvolvendo novamente:

$$\begin{aligned}
c^2x^2-2cxa^2+(a^2)^2 &= a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)\\
c^2x^2-2cxa^2+a^4 &= a^2x^2-2cxa^2+a^2c^2+a^2y^2\\
c^2x^2+a^4 &= a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2\\
a^4-a^2c^2 &= a^2x^2+a^2y^2-c^2x^2\\
a^2(a^2-c^2) &= x^2(a^2-c^2)+a^2y^2\quad (I)
\end{aligned}$$

como $b^2=a^2-c^2$, podemos substiuir em (I):

$$\begin{aligned}
a^2b^2 &= x^2b^2+a^2y^2\\
x^2b^2+a^2y^2 &= a^2b^2\quad (\div a^2b^2)\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1,\quad a>b>0.
\end{aligned}$$

Essa é a equação reduzida da elipse de focos no eixo das abscissas e centro $(0,0)$.

- Caso 2: eixo maior da elipse sobre o eixo das ordenadas

  Nesse caso: $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$.

  $P(x,y)$ estará na elipse se:

$$\sqrt{x+c)^2+x^2}+\sqrt{(y-c)^2+x^2}=2a.$$

Analogamente ao que fizemos no caso 1, obteremos:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\quad a>b>0.$$

Essa é a equação reduzida da elipse de focos nos eixos das ordenadas e centro $(0,0)$.

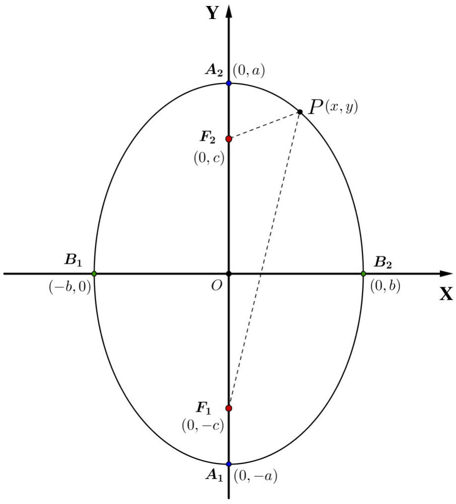


Figura 2.22: Eixo maior da elipse sobre o eixo das ordenadas

2.7.2 Hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles. Chamamos de hipérbole ao conjunto dos pontos de α cuja diferença(em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$).

$$Hip\acute{e}rbole = [P \in \alpha / |PF_1 - PF_2| = 2a].$$

Elementos principais:

F_1 e F_2: Focos

0: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo real ou transverso

$\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário

$2c$: distância focal

$2a$: medida do eixo real

$2b$: medida do eixo imaginário

$\dfrac{c}{a}$: excentricidade

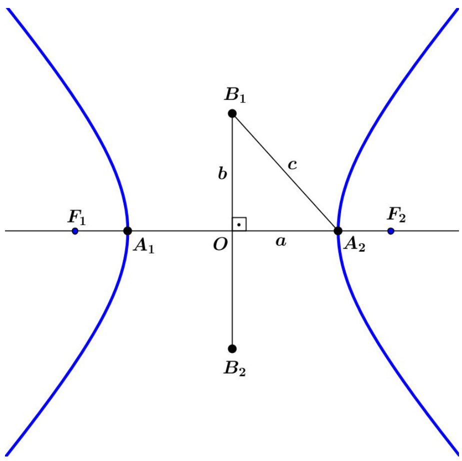


Figura 2.23: Elementos da hipérbole

Numa hipérbole, a medida do semieixo real a, a medida do semieixo imaginário b e a metade da distância focal c verificam a relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

que decorre do teorema de Pitágoras aplicado ao $\triangle OA_2B_1$.

Observa-se que, sendo a hipérbole uma curva aberta, o significado geométrico do eixo imaginário B_1B_2 é, por enquanto, abstrato.

Equação da hipérbole com centro na origem

Fixando um sistema de coordenadas cujos eixos contêm os eixos da hipérbole, obteremos a equação da hipérbole. Há dois casos a serem considerados.

- Caso 1: Os focos pertencem ao eixo das abscissas

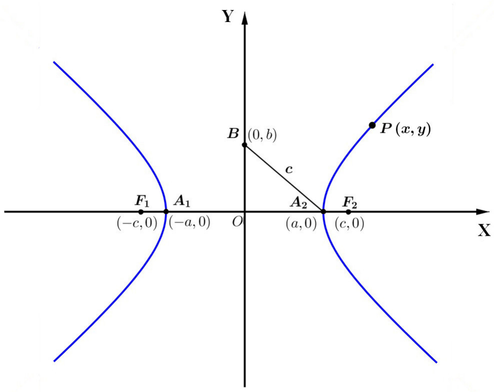


Figura 2.24: Hipérbole com centro na origem e focos no eixo das abscissas

Considere uma hipérbole com centro O na origem do sistema cartesiano, vértices em $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, com $a > 0$ e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, com $c > 0$. Tomaremos um ponto P qualquer sobre essa hipérbole, com coordenadas (x, y).

Sabemos que $|PF_1 - PF_2| = 2a$, temos:

$$|\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$\begin{aligned}
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\
x^2+2cx+c^2+y^2 &= \pm 4a^2-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\\
4cx-4a^2 &= \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \quad (\div 4)\\
cx-a^2 &= \pm a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\\
\left(cx-a^2\right)^2 &= \left(\pm a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2
\end{aligned}$$

Desenvolvendo novamente:

$$\begin{aligned}
c^2x^2-2cxa^2+(a^2)^2 &= a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)\\
c^2x^2-2cxa^2+a^4 &= a^2x^2-2cxa^2+a^2c^2+a^2y^2\\
c^2x^2+a^4 &= a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2\\
c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 &= a^2c^2-a^4\\
x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2) \quad (I)
\end{aligned}$$

como $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2-a^2=b^2$, podemos substiuir em (I):

$$\begin{aligned}
x^2b^2-a^2y^2 &= a^2b^2\\
x^2b^2-a^2y^2 &= a^2b^2 \quad (\div a^2b^2)\\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Essa é a equação reduzida da hipérbole de focos no eixo das abscissas e centro $(0,0)$.

- Caso 2: Os focos pertencem ao eixo das ordenadas

Nesse caso, os focos têm coordenadas $F_1=(0,-c)$ e $F_2=(0,c)$, com $c>0$. Efetuando cálculos análogos aos do caso anterior, obteremos:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Essa é a equação reduzida da hipérbole de focos nos eixos das ordenadas e centro $(0,0)$.

Assíntotas da hipérbole

As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais do retângulo de lados $2a$ e $2b$ na hipérbole indicada abaixo são denominadas de **assíntotas** da hipérbole. A hipérbole se aproxima cada vez mais das assíntotas, sem tocá-las.
As equações das retas assíntotas são dadas por $r_1 : bx - ay = 0$ e $r_2 : bx + ay = 0$.

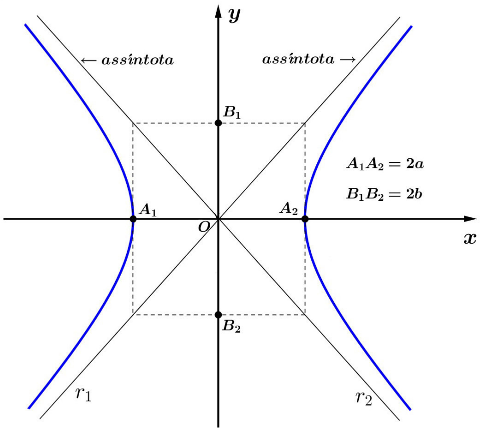


Figura 2.25: Assíntotas da hipérbole

2.7.3 Parábola

Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com F não pertencente a d, seja p a distância entre F e d. Chamamos de parábola ao conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d.

$$parábola = [P \in \alpha / PF = Pd].$$

Elementos principais:

F: foco

d: diretriz

p: parâmetro

V = vértice

reta VF: eixo de simetria

relação notável: $VF = \dfrac{p}{2}$

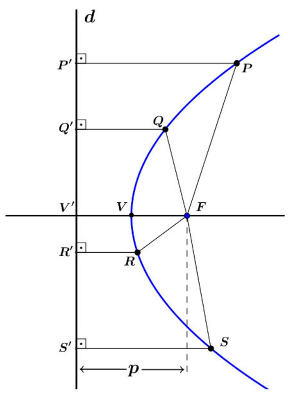


Figura 2.26: Elementos da parábola

Equação da parábola com vértice na origem:

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. É evidente que o foco é $F(\frac{p}{2}, 0)$ e a diretriz d tem equação $x = -\frac{p}{2}$.
Nestas condições, escolheremos um ponto $P(x, y)$ qualquer sobre esta parábola e sabendo que a distância entre F e P deve ser igual à distância entre P e d, isto é:

$$PF = Pd$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} \\
\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} \\
\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\
x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\
y^2 &= 2px.
\end{aligned}$$

Analogamente, se a parábola apresenta vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, temos:

$$PF = Pd$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Percebe-se que esta relação é a mesma que se obtém permutando x com y na relação anterior e, daí, decorre a equação da parábola:

$$x^2 = 2py.$$

3 Metodologia de ensino utilizando jogo matemático

3.1 Justificativa da metodologia

A aplicação desta atividade ocorreu após a realização do estudo da circunferência, contituindo-se em um jogo matemático voltado para os alunos da 3º série do ensino médio sugerido pelos cadernos de Mathema do ensino médio.

Com a utilização de jogos há a possibilidade de analisar o desempenho dos estudantes na resolução de uma questão, verificando seu raciocínio lógico ou detectando os erros cometidos. Dessa forma, é possível diagnosticar dificuldades em um item específico do conteúdo e necessidades individuais ou coletivas, buscando então, novas estratégias de ensino para auxiliá-los. Este jogo surgiu como uma alternativa para enfrentar as dificuldades encontradas pelos alunos para solucionar problemas referentes a posição relativa de pontos à circunferência. Após uma avaliação periódica da aprendizagem constatou-se um elevado índice de erro no momento de determinar a posição relativa entre ponto e circunferência.

A questão proposta nesta avaliação está transcrita a seguir:

Qual a posição relativa dos pontos A$(-3,-1)$ e B$(2,1)$ em relação à circunferência $x^2+y^2+6x-2y+6=0$?

Para solucioná-la o aluno precisa lembrar que:

Todos os pontos de uma circunferência distam igualmente do centro e mantêm dele distância igual ao raio, isso significa que, dada uma circunferência de centro C e raio r, se um ponto não dista exatamente r de C, ele poderá ser interno ou externo à circunferência.

Portanto, para uma circunferência λ de centro $C(a,b)$, raio r e um ponto $P\left(x,y\right)$ qualquer, distinto do centro C, comparando $d\left(P,C\right)$ com r, temos 3 possibilidades, como vimos na página 48.

De maneira geral, dados um ponto $P(x, y)$ e uma circunferência λ de equação reduzida $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, com centro $C(x_c, y_c)$ e raio r temos:

1. Ponto P pertencente à circunferência:

$$\begin{aligned} d^2(P, C) &= r^2 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= r^2 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

2. Ponto P externo à circunferência:

$$\begin{aligned} d^2(P, C) &> r^2 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &> r^2 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 - r^2 &> 0. \end{aligned}$$

3. Ponto P interno à circunferência:

$$\begin{aligned} d^2(P, C) &< r^2 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &< r^2 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 - r^2 &< 0. \end{aligned}$$

Se a equação da circunferência estiver na forma geral, torna-se bem mais simples utilizar a substituição das coordenadas do ponto dado na equação da circunferência do que calcular a distância do ponto ao centro da circunferência.

Resumindo, dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e a equação da circunferência $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $A > 0$ e com todas as condições para que ela represente uma circunferência satisfeitas, basta substituirmos na equação as coordenadas do ponto dado e obtermos o valor $M(x_0, y_0)$ da expressão do primeiro membro da equação.

- Se $M(x_0, y_0) = 0$, então P é ponto da circunferência.
- Se $M(x_0, y_0) < 0$, então P é interno à circunferência.
- Se $M(x_0, y_0) > 0$, então P é externo à circunferência

Observação:

Analisaremos as condições que os coeficientes da equação $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ devem satisfazer para que ela represente uma circunferência. Inicialmente vamos dividir a equação por $A \neq 0$:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Comparando com a equação geral da circunferência $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$, obteremos as relações:

- $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$ (os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais, mas não nulos)
- $\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$ (não pode haver termo xy)
- $\frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = -\frac{D}{2A}$
- $\frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = -\frac{E}{2A}$
- $\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow$
  $r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{4AF}{4A} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$ (com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$).

Estas relações servirão para determinar se uma equação é realmente a equação de uma circunferência. Em caso afirmativo, servirão também para determinar as coordenadas de centro e a medida do raio.

Verifica-se que na questão proposta, a circunferência está escrita na forma geral, portanto para determinar a posição dos pontos A e B, basta substituir suas coordenadas na equação da circunferência e observar o valor numérico encontrado.

- Ponto $A(-3, -1)$
  $= (-3)^2 + (-1)^2 + 6(-3) - 2(-1) + 6$
  $= 9 + 1 - 18 + 2 + 6$
  $= 0.$

  Como o valor encontrado é 0, conclui-se que o ponto A está na circunferência

- Ponto $B(2,1)$
  $= (2)^2 + (1)^2 + 6(2) - 2(1) + 6$
  $= 4 + 1 + 12 - 2 + 6$
  $= 21.$

  Como o valor encontrado é positivo, conclui-se que o ponto B é externo à circunferência.

  Logo, o ponto A está na circunferência e o ponto B é externo.

Se o aluno quisesse responder a questão utilizando a forma reduzida, procederia da seguinte forma:

1. Escreveria a equação reduzida, efetuando um processo prático que consiste em completar os quadrados para poder escrever a equação na sua forma reduzida.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 &= 0 \\ x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 6 &= 0 \\ (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 6 &= 0 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 &= 4. \end{aligned}$$

2. Calcularia a distância entre o centro e o ponto, e compararia com o valor do raio.

   - Ponto $A(-3,-1)$
     $= (-3+3)^2 + (-1-1)^2$
     $= (0)^2 + (-2)^2$
     $= 0 + 4$
     $= 4.$
     Valor igual ao raio, ponto na circunferência.

   - Ponto $B(2,1)$
     $= (2+3)^2 + (1-1)^2$
     $= (5)^2 + (0)^2$
     $= 25 + 0$
     $= 25.$
     Valor maior do que o raio, ponto externo à circunferência.

Grande parte dos alunos erraram ou não responderam a questão. Percebeu-se que os erros não estavam na sua maioria relacionados com o estudo das circunferências em si, mas principalmente nos cálculos efetuados por eles, como exemplo, pode-se citar uma resolução efetuada por um dos alunos quando verificava a posição relativa do ponto $A(-3,-1)$ em relação a circunferência $x^2+y^2+6x-2y+6=0$:

$= (-3)^2 + (-1)^2 + 6(-3) - 2(-1) + 6$

$= 9 - 1 - 18 + 2 + 6$

$= -2$

O que torna o resultado final incorreto, pois já verificamos que este ponto pertence à circunferência dada e não interno a ela conforme o valor numérico encontrado por este aluno.

3.2 Objetivos do Jogo

Aprimorar a compreensão dos intervalos numéricos na representação de pares ordenados no sistema de coordenadas cartesianas, apropriar-se das equações reduzida e geral da circunferência conhecidos seu centro e raio e identificar as propriedades da posição relativa entre ponto e circunferência, são objetivos que podem ser atingidos através deste jogo.

Percebe-se que o aluno tem uma dificuldade imensa de compreender a existência de intervalo real numérico como qualquer subconjunto dos números reais definido através de uma desigualdade, isto o impossibilita de encontrar corretamente a solução dos problemas que envolvam os diversos tipos de inequações.

3.3 Recursos necessários para a utilização do jogo

- moeda
- lápis
- compasso
- tabuleiro em papel quadriculado

3.4 Regras

1. A turma será agrupada em duplas, cada jogador irá escolher um colega para jogar. Definidas as duplas, cada componente irá representar em uma folha de papel comum ou quadriculado (se tiver) o plano cartesiano com os eixos coordenados representados em um intervalo inteiro variando de -10 a 10.

2. Cada jogador assinala em seu tabuleiro 10 pares ordenados distintos sem que seu adversário tenha conhecimento destas marcações. Esses pontos podem ficar em qualquer posição desde que dentro dos limites do tabuleiro, ou seja, os pares ordenados (x, y) com $-10 \leq x \leq 10$ e $-10 \leq y \leq 10$ e $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$.

3. Através da moeda, ou qualquer outra forma previamente acordada, decide-se quem começa a partida, os jogadores jogam alternadamente.

4. Na sua vez, o jogador lança a moeda, convencionou-se que a cara define raio da circunferência 1, e em coroa, o raio da circunferência será 2. As coordenadas do centro da circunferência são então definidas, observando também que $-10 \leq a \leq 10$ e $-10 \leq b \leq 10$ e $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$. Esta equação é dada pela forma reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, e é informada ao adversário.

5. O adversário traça em seu tabuleiro, com o auxílio de um compasso, a representação gráfica da equação informada e anuncia quantos de seus pontos o outro jogador capturou. Os pontos serão capturados quando estiverem no interior da circunferência ou pertencentes a ela.

6. Ganha o jogo aquele que conseguir capturar os 10 pontos de seu oponente.

3.5 Algumas explorações possíveis no desenvolvimento do jogo

Para analisar as posssibilidades de pontos capturados pelos jogadores, o livro sugere as seguintes explorações que foram analisadas e respondidas pelos alunos.

1. Está na vez de Júlio jogar. Ele diz a César a equação $(x-1)^2+(y-5)^2 = 4$. Este traça a circunferência e anuncia que Júlio fez 5 pontos dos quais 3 pertencem à circunferência. Quais os possíveis pontos atingidos por Júlio, que pertencem à circunferência ?

   Solução:

   Da equação $(x-1)^2+(y-5)^2 = 4$, obtemos o centro $C(1,5)$ e raio 2, cujo gráfico é representado por:

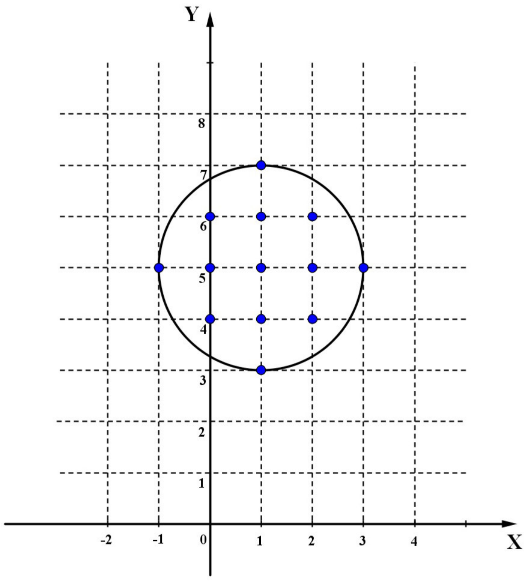
   

   Figura 3.1: Circunferência de centro $C(1,5)$ e raio 2

   Portanto os pontos possíveis atingidos podem ser:

   $(1,7)$, $(0,6)$, $(1,6)$, $(2,6)$, $(-1,5)$, $(0,5)$, $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$,$(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$ e $(1,3)$, no total de 13 pontos, sendo que os pontos que pertencem à circunferência são apenas $(1,7)$, $(-1,5)$, $(3,5)$ e $(1,3)$.

2. Até quantos pontos podem ser capturados se a circunferência possuir raio 1? E raio 2?

   Solução:

   A circunferência de raio 1 pode capturar até 5 pontos enquanto que a circunferência de raio 2 pode capturar até 13 pontos.

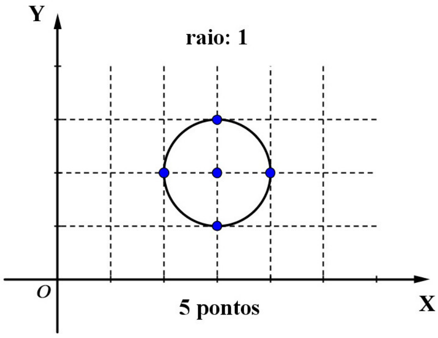


Figura 3.2: Circunferência de raio 1

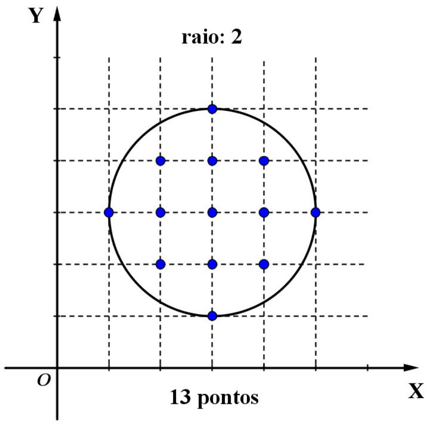


Figura 3.3: Circunferência de raio 2

3. Liste todos os pontos que a circunferência de raio 2 e centro $C(-5,-5)$ pode atingir.

   Solução:

   A equação reduzida da circunferência é:

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2 &= r^2\\ (x-(-5))^2+(y-(-5))^2 &= (2)^2\\ (x+5)^2+(y+5)^2 &= 4\end{aligned}$$

   O gráfico proveniente é:

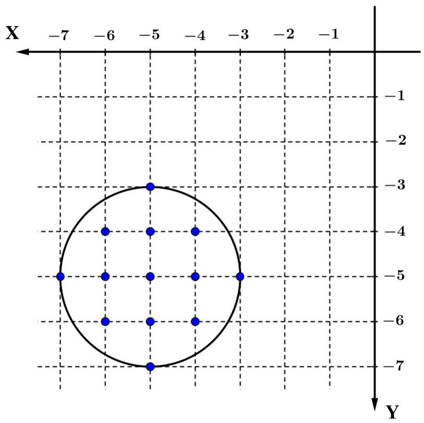


Figura 3.4: Pontos capturados pela circunferência de centro $C(-5,-5)$ e raio 2

   Os pontos que podem ser atingidos são: $(-5,-3)$, $(-6,-4)$, $(-5,-4)$, $(-4,-4)$, $(-7,-5)$, $(-6,-5)$, $(-5,-5)$, $(-4,-5)$, $(-3,-5)$, $(-6,-6)$, $(-5,-6)$, $(-4,-6)$ e $(-5,-7)$.

4. Quero atingir o ponto $(10, 10)$. Tirei cara na moeda. Escreva alguns possíveis centros que posso escolher.

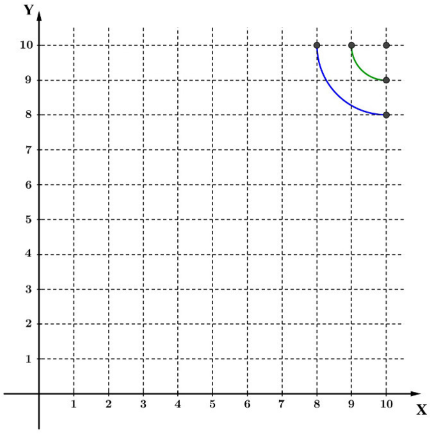


Figura 3.5: Pontos capturados pela circunferência de centro $C(10, 10)$, raio 1(verde) e raio 2(azul)

Solução:

Tirar cara significa ter raio da circunferência 1 e os pontos possíveis para o centro $C(10, 10)$ são $(9, 10)$, $(10, 9)$ e $(10, 10)$.

Caso o raio seja 2, os pontos possíveis serão:

$(8, 10)$, $(9, 10)$, $(10, 10)$, $(10, 9)$ e $(10, 8)$.

5. Lúcio obteve coroa ao lançar a moeda. Quer atingir o ponto $(-10, 4)$. Escreva três centros que Lúcio pode escolher.

Obter coroa na moeda significa obter raio igual a 2.

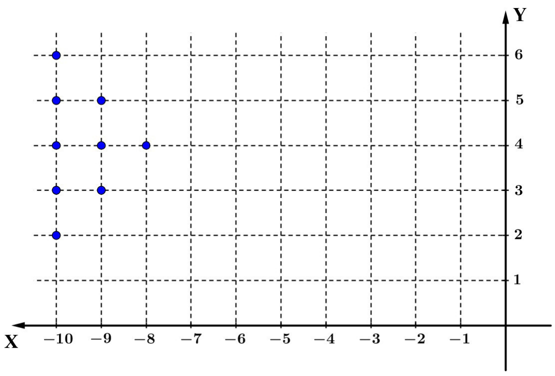


Figura 3.6: Possíveis centros de circunferência para atingir o ponto $(-10, 4)$

Os pontos possíveis para o centro da circunferência são:

$(-10, 6)$, $(-10, 5)$, $(-10, 4)$, $(-10, 3)$, $(-10, 2)$, $(-9, 5)$, $(-9, 4)$, $(-9, 3)$ e $(-8, 4)$.

3.6 Comunicando a Aprendizagem

Os alunos puderam expor livremente suas ideias e enfrentaram sem medo a solução de problemas relacionados com esta atividade, trocaram experiências, mudaram de opinião, superaram as dificuldades enfrentadas na compreensão do assunto e compreenderam que é possível aprender conteúdos matemáticos sem se prender a memorização de fórmulas e teorias que geralmente não são bem compreendidas por eles. O ambiente descontraído proporcionado pelo jogo possibilitou que determinados alunos apáticos nas aulas pudessem participar, opinar e encontrar soluções através do dialógo. Possibilitando assim, a construção do conhecimento que só se realizou na prática superando o entrave estabelecido na execução dos cálculos.

Muitos alunos afirmaram que nunca tinham passado por situação semelhante em uma aula de matemática e, portanto, seria interessante que mais atividades dessa natureza fossem propostas no desenvolvimento dos conteúdos ainda a serem trabalhados ao longo do ano, apesar do ritmo acelerado de estudo em função dos exames de acesso às universiadades que se aproximavam.

De fato, esta atividade oportunizou uma ampliação do conhecimento dos alunos, quando os deixam livres para explorar e buscar alternativas antes condicionadas a reprodução de problemas pré-estabelecidos. Eles exploraram possibilidades de conhecimento até então desconhecidas e reconheceram que essa nova forma de aprendizagem, conhecida e utilizada por poucos, abriu espaço para a aquisição de informações buscadas pelos mesmos. A condução das aulas tornou-se mais produtiva e satisfatória limitando o espaço das conversas e da utilização de recursos desnecessários (aparelho celular para conversação em redes sociais) para o bom desenvolvimento destas aulas.

Os alunos tiveram a oportunidade de mostrar o que aprenderam de várias formas, entre elas, pode-se citar :

1. A produção de dicas para vencer o jogo relatadas pelos alunos

    - Escolher pontos mais próximos dos limites do tabuleiro (plano cartesiano). Esta ação diminui a quantidade de pares ordenados possíveis de serem capturados pelo adversário, já que os limites da circunferência não podem ultrapassar os limites do tabuleiro.

- Em posse do raio da circunferência, escolher as coordenadas do centro de tal forma que a circunferência esteja inserida nos limites do tabuleiro. Isto permitirá uma abrangência maior de pontos a serem capturados.
- Iniciar a pesquisa dos pontos pela região central do tabuleiro expandindo para as extremidades conforme for capturando os pontos. Desta forma o jogador poderá ter uma ideia em que parte do tabuleiro o adversário concentrou os pontos.
- Torcer para que na moeda saia mais cara do que coroa, pois na saída de cara a abrangência de pares ordenados é superior do que na coroa.(com cara são 13 pontos possíveis e na coroa são apenas 5).
- Se possível observar a estratégia de seu futuro oponente quando este estiver jogando com outro jogador. Desta forma ao jogar com ele, você já terá uma noção do tipo de jogo desenvolvida por ele.
- Na reta final do jogo, escolher equações de circunferências bem próximas das já existentes, desta forma o jogador diminuirá a quantidade de pares ordenados não capturados pelas circunferências.

2. Aplicação de problemas que possam ser revolvidos a partir do desenvolvimento do jogo. Por exemplo, pode-se citar:

- Das equações indicadas abaixo, qual(ais) podem capturar o ponto $P(6,-9)$?

  a)$(x-4)^2+(y+9)^2=4$

  b)$(x+5)^2+(y+11)^2=4$

  c)$(x-7)^2+(y+8)^2=4$

  d)$(x-5)^2+(y-3)^2=4$

  e)$(x-6)^2+(y+8)^2=4$

- Dados os pontos $A(3,4)$, $B(5,2)$, $D(1,2)$, $E(2,0)$ e $F(4,4)$, quais pontos são pertencentes à circunferência de equação $(x-3)^2+(y-2)^2=4$?

- Qual ponto indicado abaixo pertence simultaneamente às circunferências $(x+5)^2+(y-1)^2=4$ e $(x+3)^2+(y-2)^2=1$?

a)$A(-2,4)$

b)$B(1,-5)$

c)$D(2,-4)$

d)$E(-3,1)$

e)$F(-2,-3)$

Figura 3.7: Alunos preparando o tabuleiro para jogar

4 Experiência em sala de aula

É possivel observar que nos últimos anos, vem aumentado a publicação de livros, revistas e artigos científicos descrevendo a utilização de jogos no ensino da Matemática, com recomendações e exemplos. Em geral, os autores dessas obras classificam os jogos, mencionando aqueles que envolvem conteúdos específicos e os que desenvolvem estratégias, e cada um desses tipos é importante em alguma etapa da aprendizagem. (RÊGO; Rêgo, 2000; LARA, 2003; FLEMMING; Mello, 2003).

4.1 Um pouco da história do Centro de Ensino São Cristóvão

No ano de 1991, o bairro São Cristóvão, necessitava de uma escola pública que oferecesse o ensino de segundo grau (assim denominado na época). Destinado ao ensino público, existia naquela região somente o CEMA, que atendia à comunidade carente, mas oferecia apenas o ensino de 1º grau(assim denominado na época). Diante da extrema necessidade, em 1992, foi fundado nas dependências do CEMA, o Centro de Ensino médio São Cristóvão que começou a funcionar apenas no turno matutino.

Inicialmente a clientela, na maioria era oriunda da zona rural e com o intuito de atender melhor a demanda do bairro, mais tarde, ainda nas mesmas dependências, a escola passou a oferecer turmas no turno vespertino.

A demanda da Comunidade do São Cristóvão crescia a cada ano e espaço maior se fazia necessário, situação que a estrutura física do antigo CEMA não comportava mais.

Outra situação que tornou-se muito delicada, referia-se ao atendimento à portadores de deficiência. Sempre houve como filosofia da escola, a preocupação em fazer a inclusão social facilitando o acesso às dependêcias da escola.

Conhecedora da crescente demanda e consequente necessidade de um espaço maior, a Secretaria Estadual de Educação alocou, no ano de 2002 para a instalaçao da escola, um prédio situado à Avenida Guajajaras, nº 90, cujo espaço físico maior permitiu atender melhor à clientela estudantil do São Cristóvão e adjacência.

Atualmente, o CE São Cristóvão possui uma estrutura física que supri as necessidades de sua clientela, funciona nos três turnos oferecendo cursos de ensino médio. Sua equipe de trabalho prima pela educaçao de qualidade e, com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, objetiva a preparação básica para o trabalho e para o exercício da cidadania, buscando desenvolver junto ao alunado uma formação ética, considerando os aspectos sócio-culturais-econômicos do contexto da comunidade do São Cristóvão.

As turmas são denominadas 301 e 302 compostas, respectivamente, por 42 e 43 alunos na faixa etária entre 16 e 18 anos. São alunos de classe média média e média baixa que moram em sua maioria no bairro onde a escola está localizada. E outros provenientes de bairros distantes que necessitam fazer uso do transporte coletivo para se deslocar até a escola, utilizando os terminais da integração do São Cristóvão e do Distrito Industrial. Grande parte deles ingressaram na escola desde a primeira série e permanecerão até concluir o ensino médio. Devido aos programas do governo Federal, alguns alunos fazem cursos profissionalizantes no turno vespertino, concomitante ao ensino médio.

4.2 Implantação da Atividade

Com a finalidade inicial de trabalhar os conceitos de ponto, reta, circunferências e cônicas adquiridos no estudo de Geometria Analítica, esta atividade foi desenvolvida por cinco alunos de cada uma das duas turmas do turno matutino da terceira série do ensino médio do Centro de Ensino São Cristóvão.

Para a realização desta atividade, adotou-se dois critérios fundamentais: a possibilidade de deslocamento à escola no turno vespertino porque levaria um certo tempo para ser realizada, o que dificultaria o andamento regular do conteúdo, caso fosse desenvolvida em dias normais de aula e o conhecimento em informática para facilitar na execução gráfica do trabalho. Não haveria prejuízo para os demais alunos porque o desenvolvimento desta atividade seria compartilhados em sala de aula e após a sua elaboração seria aplicada para todos os alunos em sala de aula.

Muitos ficaram interessados, mas como seria um trabalho de criação, chegou-se a conclusão que uma equipe pequena seria capaz de desenvolvê-la sem muito contratempo. A quantidade de alunos disponíveis reduziu quando ficou definido o horário de encontro para a execução desta atividade no turno vespertino. Foi feita uma reunião com todos aqueles disponíveis para conversarmos sobre o projeto. Esta primeira reunião foi destinada para a apresentação do projeto, nela foi explicado a intenção de se adaptar um jogo que facilitasse o aprendizado da geometria analítica para suprir as lacunas deixadas no entendimento do conteúdo ministrado numa aula convencional.

Ficou definido que no encontro seguinte cada aluno interessado levaria sugestões de jogos para serem analisados e discutidos por todos. Surgiam, então, dois novos critérios de seleção: a presença e a sugestão. As sugestões foram diversas e a quantidade de alunos já era a ideal, 5 alunos por turma, não foi necessário acrescentar nem retirar alunos, a seleção acabou se tornando um processo natural.

Entre as sugestões surgiram jogos como batalha naval, jogo da malha quadriculada, show do milhão, todos estes jogos já tinham sido adaptados e pelas pesquisas já eram conhecidas as formas como tinham sido aplicadas em sala de aula, seus objetivos e metodologias, então decidiu-se aplicar um jogo que não houvesse relato de adaptação. Foi nesta tomada de decisão que um aluno apresentou um jogo e disse que alguns colegas de sala que possuiam um smartphone tinham este aplicativo no celular. Após baixado o aplicativo, realizaram-se algumas jogadas e percebeu-se a posssibilidade de adaptá-lo aos estudos de geometria analítica.

4.3 Conhecendo o jogo inspirador

O aplicativo *Perguntados* é um jogo de perguntas e respostas muito utilizado no momento pelos mais jovens. O game é para ser jogado com outro participante (amigo ou aleatório) e é exclusivo para smartphones e tablets. Ao baixar o aplicativo pelo ggogle play, o jogador ganha inicialmente três vidas que permitem três partidas. Caso o usuário acerte as questões, avança no jogo e ganha mais oportunidades de jogo. Caso erre, é necessário esperar um pouco para iniciar uma nova partida. É também um jogo de estratégia: o participante pode duelar com os adversários para obter os seus 6 personagens. Cada categoria tem um "mascote", um desenho que representa a categoria, é uma espécie de troféu.

Ao girar a roleta, se cair na casa especial, pode escolher entre jogar para ganhar uma personagem ou duelar com os adversários. Ao acertar, o jogador também acumula moedas, item que ajuda a aumentar o tempo para responder as perguntas, inicialmente de 30 segundos, além de vantagens como excluir alternativas erradas ou pular perguntas.

O jogo possui uma interface alegre, sofisticada e intuitiva, é um jogo rápido, dinâmico e muito contagiante. O participante pode propor as perguntas que são confrontadas com as demais, serão avaliadas e depois posta em jogo. Há versão em vários idiomas.

Outro ponto interessante do jogo são a colaboração: o usuário pode avaliar a qualidade das questões respondidas (chata ou legal), adicionar perguntas e ainda conversar com o adversário pelo aplicatico.

Objetivo do jogo

O objetivo do jogo é conquistar os seis personagens da roleta. Cada personagem representa uma categoria de perguntas: Artes, Ciência, Esporte, Entretenimento, Geografia e História. O primeiro jogador a conquistar os seis personagens será o ganhador. Cada partida terá um máximo de 25 rodadas.

Conquistando personagens

Para conquistar um personagem, o jogador responde três perguntas corretamente. Depois de acertadas três perguntas corretas, deverá escolher entre desafiar o oponente para obter um de seus personagem ou responder uma nova pergunta para conquistar o personagem que desejar. Existe uma categoria especial, representado por uma coroa, que também da a oportunidade de desafiar o oponente ou responder uma pergunta sobre a área(Categoria) que escolher. Caso responda corretamente, ganhará o personagem; se errar passará a vez para o oponente.

Duelo

Para participar de um duelo, os dois jogadores devem ter pelo menos um personagem. Quem desafia, escolhe um de seus personagem e outro do seu oponente para tentar conquistar. Durante o duelo serão feitas 6 perguntas iguais aos dois jogadores, uma de cada categoria. O jogador que tiver mais respostas corretas será o vencedor.

Se quem desafiou ganhar, levará o personagem do seu oponente, caso o ganhador for o desafiado, conservará o seu personagem. Se houver empate, o jogador desafiado responderá uma última pergunta de uma categoria aleatória. Se responder corretamente, continua com o seu personagem, se errar, perderá o personagem.

Fim do jogo

O primeiro jogador que conquistar os seis personagens ganha a partida. Se não houver ganhador depois de 25 rodadas, o jogador que tiver mais personagem ganha a partida. Se os dois jogadores tiverem a mesma quantidade de personagem, um duelo decide a partida. Se houver empate no duelo, o ganhador será aquele que começou a partida.

4.4 O surgimento do jogo Matemáticos

O jogo *Matemáticos* é uma adaptação do jogo *Perguntados*, foi totalmente elaborado e confeccionado pelos alunos no formato de um jogo de tabuleiro, é do tipo perguntas e respostas. Foi elaborado utilizando material disponibilizado no mercado para construir o tabuleiro e as fichas que foram feitos de materiais adesivos. Alguns materiais foram comprados, tais como roleta e dado, outros como pinos, marcadores e ampulhetas foram reaproveitados de outros jogos. Pode-se afirmar que o custo da confecção do jogo foi baixo e sugere-se, quando possível, dentro do planejamento escolar, viabilizar o uso de material reciclável na fabricação dos jogos, ressaltando o reaproveitamento para despertar a consciência da preservação do meio ambiente no âmbito escolar. Como o objetivo era trabalhar a geometria analítica, o jogo ficou dividido em 4 categorias, cada uma representando uma parte: ponto, reta, circunferência e cônicas.

Todos os passos foram executados segundo o cronograma descrito a seguir:

- 1º Momento: Com o aplicativo baixado, todos adicionaram os demais componentes da equipe de elaboração e jogaram entre si cujo objetivo era conhecer o jogo, identificando a estrutura física, cada componente, analisando a viabilidade de transformá-lo em um jogo adequado a necessidade educacional. Ao decidir-se pela utilização dos jogos é importante refletir sobre a melhor forma de apresentá-los e como poderão ser aproveitados. Para Kamii e Housman, (2002) *"a melhor forma de introduzir a maioria dos jogos é fazendo as crianças jogarem o novo jogo"*. Foi feita uma análise crítica e percebe-se que seria um jogo facilmente adaptável para qualquer área do conhecimento pela abrangência de conteúdos relacionados a ele, inclusive na secção de ciências é possível elaborar questões de matemática, além de física, biologia e química.

  Quando os estudantes do ensino médio se predispõem para jogar, demonstram com satisfação a vontade de ampliar seus conhecimentos e quando tentados para construir seus próprios jogos, surge a oportunidade de renovar suas forças na busca de novos conhecimentos.

  Com o tempo foi se percebendo que as questões, principalmente as melhores elaboradas, representavam uma aula de revisão de todas as disciplinas cobradas nos exames de acesso à educação superior, um ponto extremamente positivo, motivante e desafiador para os alunos. Não havia mais dúvida, este seria o jogo inspirador.

  Aproveitando a oportunidade, foi sugerido aos alunos a elaboração de questões de ciências para contribuir com o banco de questões. O tema foi livre, deixando que eles decidissem quais assuntos elaborariam as questões. Na verdade, a intenção era fazer com que eles já fossem se familiarizando com a elaboração das perguntas, observando o formato e a complexidade com que elas são apresentadas. A figura 4.1 mostra um exemplo de questão elaborada para o banco de dados do jogo inspirador.

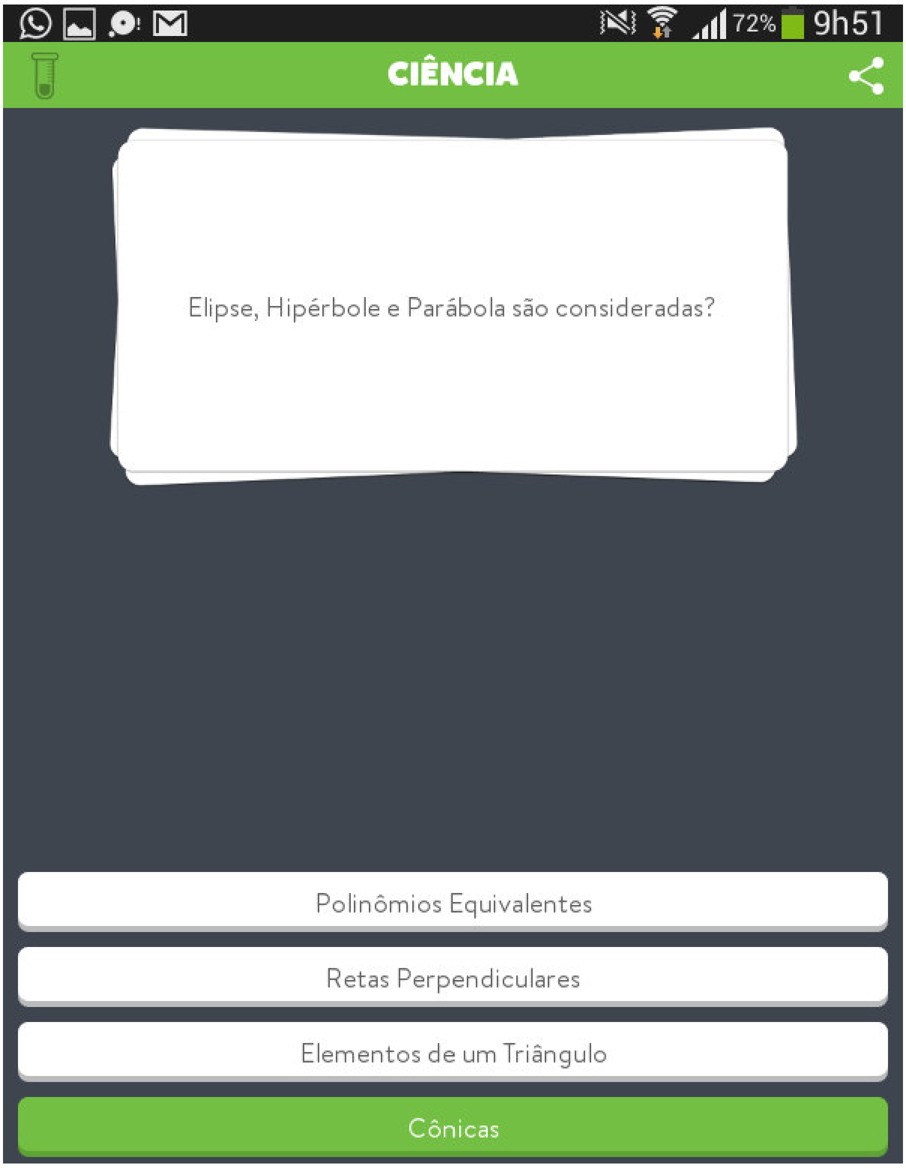


Figura 4.1: Questão elaborada para o banco de dados do jogo inspirador

- 2º Momento: Este momento ficou reservado para a criatividade e liberdade de criação. O grande diferencial na produção de jogos é a criatividade desenvolvida pelos envolvidos na produção destes jogos. É evidente o envolvimento, a motivação e o esforço de todos. Nele foi desenvolvido o layout do tabuleiro e os ícones que representariam cada componente do jogo.

  As opiniões foram surgindo e todas as sugestões anotadas e observadas com muita atenção. As discussões eram intensas e produtivas, todos queriam deixar sua marca no trabalho. Depois de alguns minutos de trocas de ideias, chegou-se a um esboço dos ícones que representariam o ponto, a reta, a circunferência e as cônicas mostrados na figura 4.2.

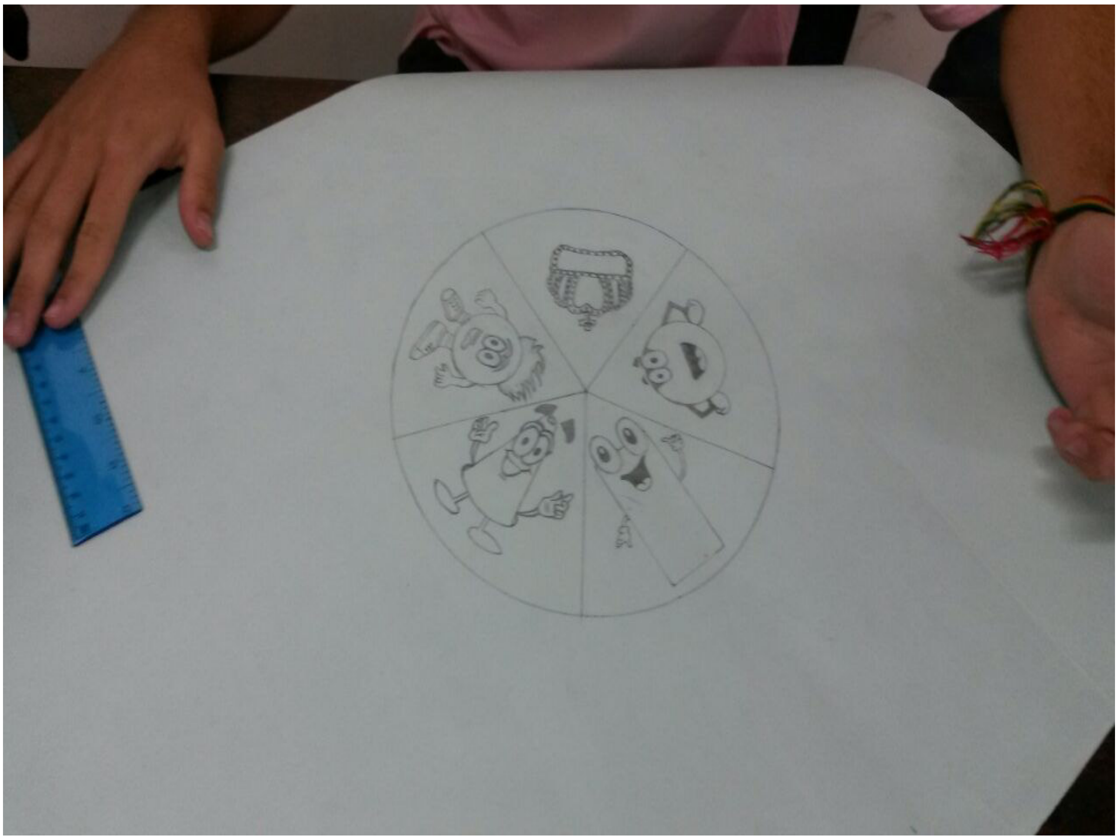


Figura 4.2: Esboço dos ícones no formato da roleta

A intenção era disponibilizar no tabuleiro todos os elementos que seriam utilizados ao longo do jogo como os pinos e marcadores, as cartas pergunta e cartas desafio, portanto foi destinado um espaço para cada elemento. Em cada canto do tabuleiro, ficaria reservado para cada um dos 4 participantes, quantidade máxima de jogadores por partida e para justificar o nome do jogo (*Matemáticos*) atribuiu-se a cada jogador o nome de um matemático que de certa forma contribuiu com o estudo da geometria analítica. Chegou-se aos nomes de René Descartes, Pierre de Fermat, Leibniz e Isaac Newton[1].

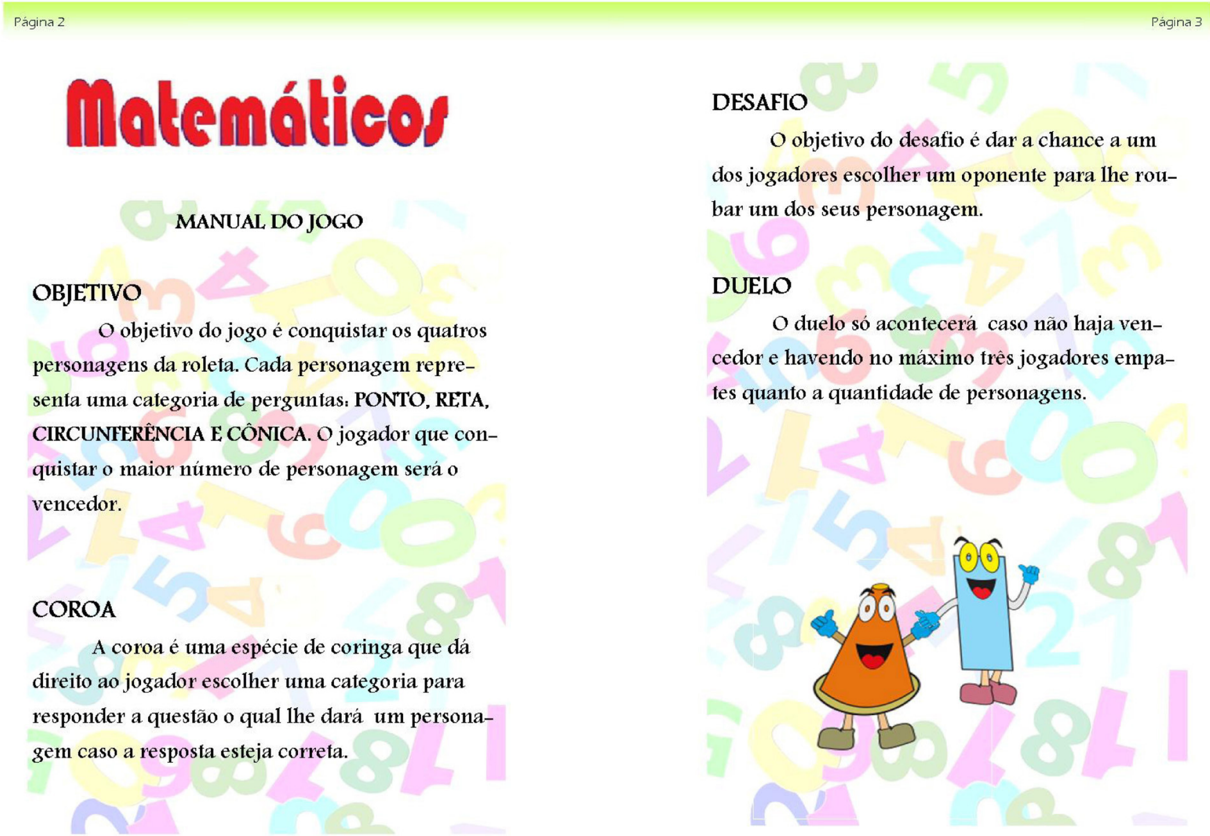
- 3º Momento: Chegamos na fase de elaboração das questões que iriam compor

[1] Os cientistas Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz concentraram estudos na Geometria Analítica, que serviu como base teórica e prática para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, muito utilizado atualmente na Engenharia.

as perguntas do jogo. Todas as questões foram elaboradas pelos alunos através de pesquisas aos materiais didáticos disponíveis na bibliografia deste trabalho. Foram elaboradas 100 questões, sendo 20 questões de cada categoria, mais 20 questões do desafio. Todas as questões foram analisadas, se estivesse em um nível aceitavél de elaboração era aprovada, caso contrário, era refeita em conjunto. A figura 4.3 ilustra um dos momentos da elaboração das questoes do jogo.

Figura 4.3: Elaboração das questões do jogo *Matemáticos*

- 4º momento: Elaboração das regras do jogo. As regras do jogo foram surgindo em análise as regras do jogo inspirador.



Página 2

Matemáticos

MANUAL DO JOGO

OBJETIVO

O objetivo do jogo é conquistar os quatros personagens da roleta. Cada personagem representa uma categoria de perguntas: **PONTO, RETA, CIRCUNFERÊNCIA E CÔNICA.** O jogador que conquistar o maior número de personagem será o vencedor.

COROA

A coroa é uma espécie de coringa que dá direito ao jogador escolher uma categoria para responder a questão o qual lhe dará um personagem caso a resposta esteja correta.

Página 3

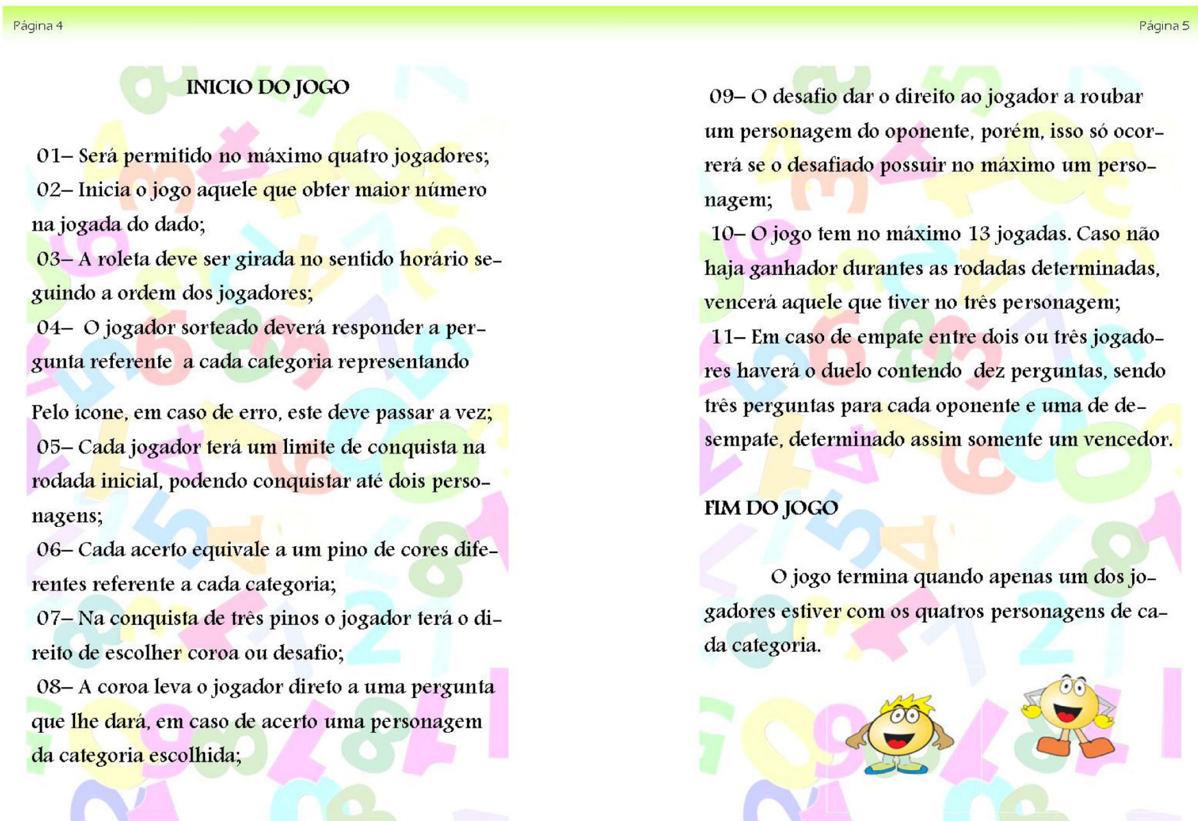
DESAFIO

O objetivo do desafio é dar a chance a um dos jogadores escolher um oponente para lhe roubar um dos seus personagem.

DUELO

O duelo só acontecerá caso não haja vencedor e havendo no máximo três jogadores empates quanto a quantidade de personagens.

Figura 4.4: Parte 1 do manual



Página 4

INICIO DO JOGO

01– Será permitido no máximo quatro jogadores;
02– Inicia o jogo aquele que obter maior número na jogada do dado;
03– A roleta deve ser girada no sentido horário seguindo a ordem dos jogadores;
04– O jogador sorteado deverá responder a pergunta referente a cada categoria representando

Pelo icone, em caso de erro, este deve passar a vez;
05– Cada jogador terá um limite de conquista na rodada inicial, podendo conquistar até dois personagens;
06– Cada acerto equivale a um pino de cores diferentes referente a cada categoria;
07– Na conquista de três pinos o jogador terá o direito de escolher coroa ou desafio;
08– A coroa leva o jogador direto a uma pergunta que lhe dará, em caso de acerto uma personagem da categoria escolhida;

Página 5

09– O desafio dar o direito ao jogador a roubar um personagem do oponente, porém, isso só ocorrerá se o desafiado possuir no máximo um personagem;
10– O jogo tem no máximo 13 jogadas. Caso não haja ganhador durantes as rodadas determinadas, vencerá aquele que tiver no três personagem;
11– Em caso de empate entre dois ou três jogadores haverá o duelo contendo dez perguntas, sendo três perguntas para cada oponente e uma de desempate, determinado assim somente um vencedor.

FIM DO JOGO

O jogo termina quando apenas um dos jogadores estiver com os quatros personagens de cada categoria.

Figura 4.5: Parte 2 do manual

MANUAL DO JOGO

- OBJETIVO

  O objetivo do jogo é conquistar os quatros personagens da roleta. Cada personagem representa uma categoria de perguntas: PONTO, RETA, CIRCUNFERÊNCIA E CÔNICAS. O jogador que conquistar primeiro os quatros personagem será o vencedor.

- COROA

  A coroa é uma espécie de coringa que dá direito ao jogador escolher uma categoria para responder a questão o qual lhe dará um personagem caso a resposta esteja correta.

- DESAFIO

  O objetivo do desafio é dar a chance a um dos jogadores escolher um oponente para lhe "roubar"um dos seus personagem. Só poderá desafiar o oponente se ambos os jogadores tiverem no mínimo, um ícone de qualquer personagem.

- DUELO

  O duelo só acontecerá caso não haja vencedor no final das 13 partidas e havendo no máximo dois jogadores empatados quanto a quantidade de personagens.

- INICIO DO JOGO

  1. Será permitido no máximo quatro jogadores;
  2. Inicia o jogo aquele que obter maior número obtido no dado;
  3. A roleta deve ser girada no sentido horário seguindo a ordem dos jogadores;
  4. O jogador sorteado deverá responder a pergunta referente a cada categoria representando pelo ícone, em caso de erro, este deve passar a vez;
  5. Cada jogador terá um limite de conquista na rodada inicial, podendo conquistar até dois personagens;
  6. Cada acerto equivale a um pino de cores diferentes referente a cada categoria;

7. Na conquista de três pinos o jogador terá o direito de escolher coroa ou desafio. Conquistar um pino é responder corretamente uma pergunta;

8. Na primeira rodada, o jogador que conseguir obter dois personagens, é obrigado a parar passando a vez para os demais, de tal forma que todos os jogadores consigam jogar pelo menos uma vez. A partir da segunda rodada já é possível obter um vencendor;

9. A coroa leva o jogador direto a uma pergunta que lhe dará, em caso de acerto, uma personagem da categoria escolhida;

10. O desafio dá o direito ao jogador a roubar um personagem do oponente, porém, isso só ocorrerá se o desafiado possuir pelo menos um personagem;

11. O jogo tem no máximo 13 jogadas. Caso não haja ganhador durante as rodadas determinadas, vencerá aquele que tiver o maior número de personagem. Uma rodada se completa, quando todos os jogadores participam dela;

12. Em caso de empate entre dois ou mais jogadores haverá o duelo de perguntas. Consagrando vencedor aquele que responder mais perguntas corretas de forma alternada entre eles.

- FIM DO JOGO

  O jogo termina quando um dos jogadores conquistar os personagens de cada categoria.

Figura 4.6: Equipe de elaboração do jogo *Matemáticos*

Durante a fase de teste realizada pela equipe de elaboração figura 4.6 pode-se observar que o jogo funcionava adequadamente para 4 jogadores mediado pelo professor. Entetanto a finalidade era alçancar todos os alunos da turma ao mesmo tempo para que houvesse a interação entre eles e o alcançe do objetivo de trabalhar os assuntos de geometria analítica. A solução encontrada foi dividir cada uma das turmas em quatro grande grupos onde um lider ficaria responsável pela mediação das tomadas de decisões. Após a aplicação do jogo nas duas turmas percebeu-se a necessidade de ampliação do número de cartas e a certeza de que é possível aplicar jogos no ensino médio sem perder o objetivo principal da aprendizagem.

5 Considerações finais

O uso de jogos foi uma maneira de tratar os assunto da geometria analítica de uma forma atraente e interessante. Para que houvesse um retorno por parte dos alunos, era necessário que eles estivessem motivados com as diversas situações propostas. Os jogos também propiciaram uma integração entre os alunos, bem como a prática da socialização, da cooperação e da formação/resgate de atitudes. Associam-se a essas colocações as de Borin (2004), o qual defende que a atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo, da linguagem, da criatividade, da atenção e da concentração. Habilidades estas essenciais para o aprendizado em Matemática. Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes positivas frente a seus processos de aprendizagem.

Aliado ao bloqueio, encontramos o medo de errar. Nesse sentido, o jogo torna o aluno mais autônomo e confiante em si. Isso pode ser adquirido através dos jogos de grupo, onde há cooperação, colaboração mútua e interação social.

Adaptar jogos já existentes é um um dos caminhos que podem ser seguidos pelos profissionais da educação. Existem vantagens de adaptar um jogo não-educacional a propósitos educativos, como poder explorar um jogo já conhecido pelo seu público em outro contexto que favoreça a produção de conhecimento numa determinada disciplina, a redução de custos com a produção de jogos educativos específicos para um determinado conteúdo e a garantia de que um jogo já conhecido vai se tornar também atrativo e divertido em uma nova versão adaptada pelos próprios alunos, fato observado na adaptação denominada *Matemáticos*.

Percebeu-se que através do jogo, é possível resgatar valores morais e éticos, estimular o raciocínio, a cooperação e a interação, além de auxiliar no desenvolvimento mental e social daqueles que jogam. Com esta visão, o professor pode inovar as suas aulas, dinamizar os conteúdos dando um sentido real e produtivo para os seus ensinamentos, além de elevar a auto-estima do aluno, quando este percebe que tudo que está sendo produzido, reinventado, é em benefício dele e se justifica pelo esforço do professor em se aliar aos fatores que se tornaram mais interessante do que sua aula tradicional, a exemplo, a utilização de dispositivos móveis cada vez mais acentuado em sala de aula sem propósitos educacionais.

Os resultados indicaram que houve um processo desencadeador na construção dos procedimentos e dos conceitos matemáticos, pelos alunos, em situações de jogo. Com o uso do jogo adaptado, criou-se um ambiente de provocação acerca de situações em que era necessário colocar em prática o conhecimento adquirido na geometria analítica.

Anexo I

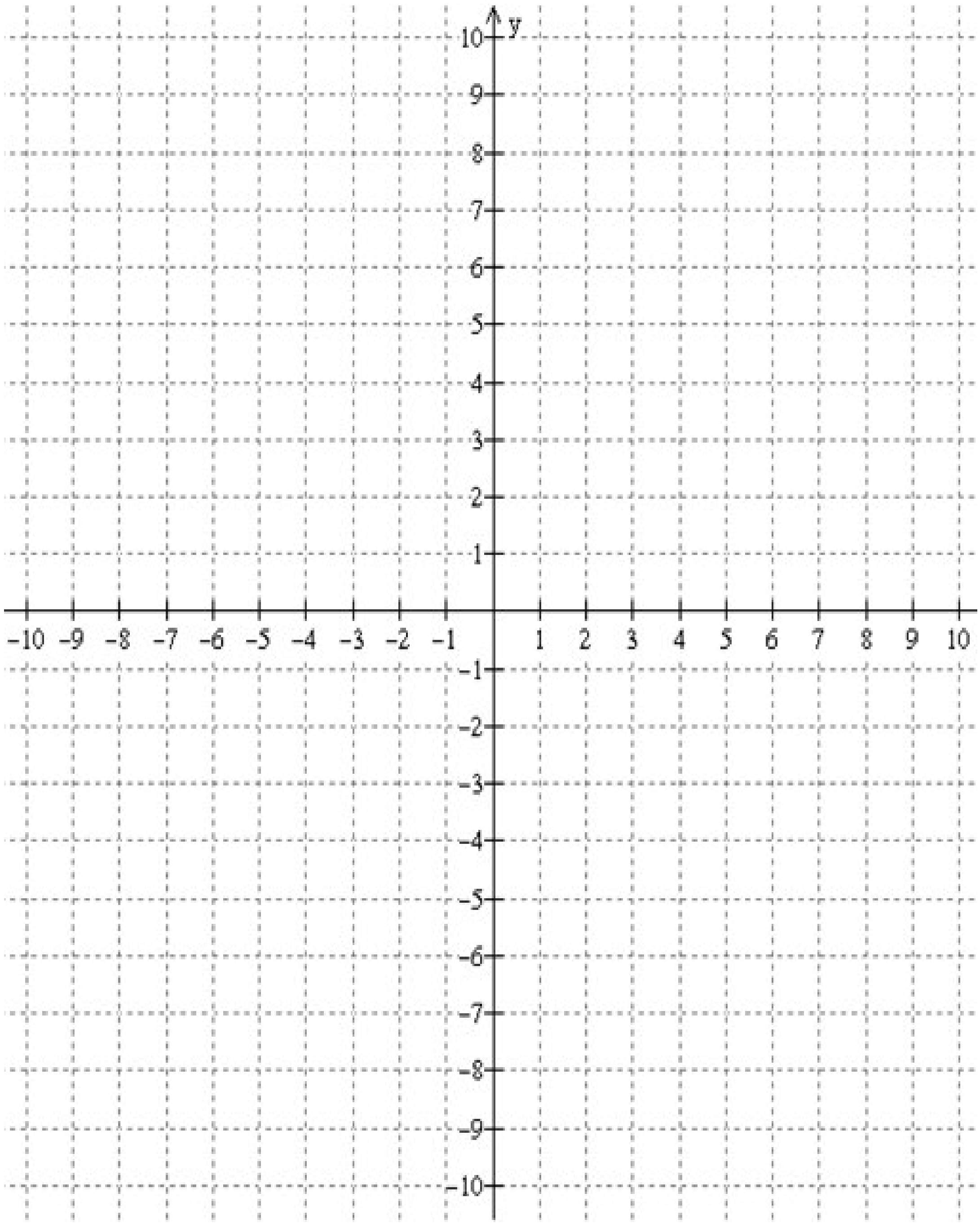


Figura 5.1: Tabuleiro do jogo capturando pontos

Anexo II

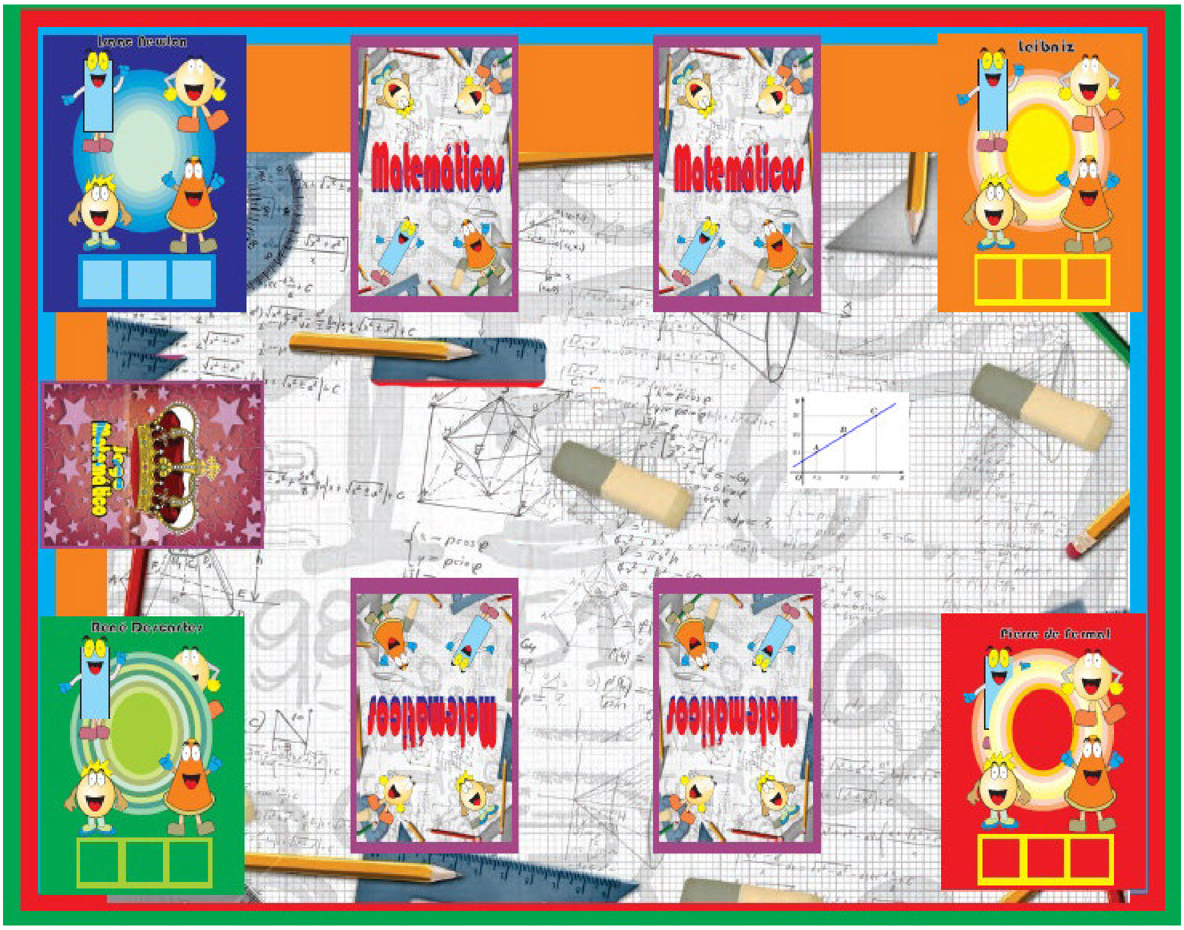


Figura 5.2: Tabuleiro do jogo *Matemáticos*

Anexo III

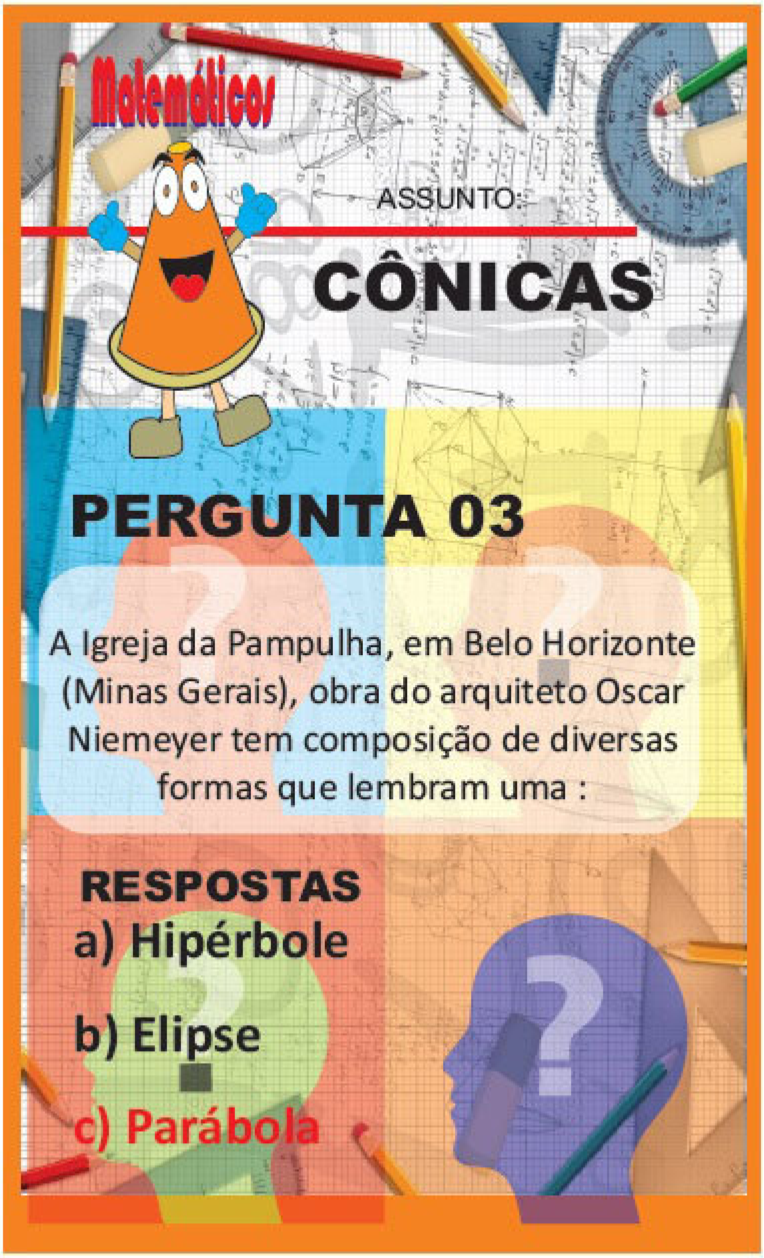


Figura 5.3: Exemplar de carta pergunta do jogo *Matemáticos*

Anexo IV

Figura 5.4: Exemplar de carta desafio do jogo *Matemáticos*

Referências Bibliográficas

[1] KAMII, Constance; DEVRIES, Rheta. *Jogos em grupo na educação infantil: implicações da teoria de Piaget. Tradução Marina Célia Dias Carrasqueira; prefacio Jean Piaget. São Paulo, SP: Trajetória Cultural, 1991.*

[2] LARA, I. C. M. *J*ogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais. São Paulo, SP: Rêspel, 2003.

[3] FLEMMING, D. M.; MELLO, A. C. C. *C*riatividade e jogos lógicos. São José: Saint Germain, 2003.

[4] GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; TIMM, Ursula Tatiana. *U*tilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. Educação Matemática em Revista, nov. 2000.

[5] LEAL, Telma; ALBUQUERQUE, Eliana; LEITE, Tânia. *J*ogos: alternativas didáticas para brincar alfabetizando(ou alfabetizar brincando ?). In : Morais, A.G.; ALBUQUERQUE, E. B. C; Leal, T.F. Alfabetização: apropriação do sistema de escrita alfabética. Recife, PE: Autêntica, 2005.

[6] OLIVEIRA, Sandra Alves de. *O lúdico como motivação nas aulas de Matemática.* Artigo publicado na edição nº 377, jornal Mundo Jovem, junho de 2007, p. 5.

[7] PIAGET, Jean. *A linguagem e o pensamento da criança.* 6 ed. São Paulo, SP: Martins Fontes, 1990.

[8] Ribeiro, Flávia Dias. *Metodologia do ensino de matemática e física: jogos e modelagem na educação matemática.* Curitiba, PR: Editora Ibpex, 2008.

[9] RÊGO, R.G.; RÊGO, R.M. *Matematicativa.* João Pessoa, PB: Ed. da UFPB, 2000.

[10] WINNICOTT, D. W. *O brincar e a realidade.* Rio de Janeiro, RJ: Imago, 1975.

[11] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática*. Campinas, SP: Papirus, 1996.

[12] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; PESSOA, Neide; ISHIHARA, Cristiane. *Cadernos do Mathema. Jogos de matemática de 1º a 3º ano*. Porto Alegre, RS: Artemed, 2008.

[13] GIANCATERINO, Roberto. *A matemática sem rituais*. Rio de Janeiro, RJ: Wak editora, 2009.

[14] IEZZI, Gelson. *F*undamentos de matemática elementar,volume 7: geometria analítica. São Paulo, SP: Atual, 2005.

[15] SOUZA, Joamir. *N*ovo olhar: Matemática 3. São Paulo, SP: Ed. FTD, 2013.

[16] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA; Nilze de. *M*atemática: Ciência e aplicações, volume 3. São Paulo, SP: Ed. Saraiva, 2013.

[17] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. *Matemática: uma nova abordagem, volume 3*. São Paulo, SP: FTD, 2001.

[18] MACHADO, Antonio dos santos. *Geometria analítica e polinômios*. São Paulo, SP: Atual, 1986.

[19] LEONARDO, Fabio Martins. *Conexões com a matemática 3*. São Paulo, SP: Ed. Moderna, 2013.