UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

SEBASTIÃO ALVES DA SILVA

INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

São Luís
2016

SEBASTIÃO ALVES DA SILVA

INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valdiane Sales Araújo

São Luís

2016

Silva, Sebastião Alves da.

INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS / Sebastião Alves da Silva - 2016

98.p

Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, 2016.

Orientadora: Valdiane Sales Araújo

1. Frações contínuas 2. Números reais - aproximações 3. Aplicações. I.Título.

SEBASTIÃO ALVES DA SILVA

INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06/09/2016

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Valdiane Sales Araújo (Orientadora)

Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. João de Deus da Silva

Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

A Jorge Valfredo Batista Ventura, e a todos os meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Supremo Deus Criador por ter me guiado nessa caminhada e por ter sempre me iluminado em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis.

À minha orientadora Valdiane Sales Araújo, aos professores Sandra Imaculada Moreira Neto, João de Deus Mendes da Silva, pelos apontamentos e correções sem os quais este trabalho não se realizaria.

A minha companheira Lucimeires Cavalcante Bandeira que me incentiva a continuar sempre em frente.

A CAPES por ter me dado auxílio financeiro durante o curso.

A coordenação do PROFMAT que sempre se colocou a disposição para resolver quaisquer situação, tanto de ordem educacional, quanto de ordem administrativo.

Aos meus colegas de turma, que me mostrou que a união nos permitiu superar grandes dificuldades encontradas ao ao longo do curso, e assim conseguimos continuar com insistência e perseverança em busca de mais conhecimentos.

A todos aqueles que partilharam comigo a imensa alegria que foi ser aprovado, ter cursado, e ter concluído esse mestrado.

"Los fenómenos naturales se expresan a través del número sin que sea necesario medir. La observación y la medida tan sólo consiguen verificar lo que ya estaba presente dentro del propio número. Sólo podemos averiguar los secretos del número sujetándolo bajo la luz de la forma adecuada".

Jay Kappraff

RESUMO

Neste trabalho fazemos uma apresentação sobre frações contínuas, desde sua origem histórica intuitiva, juntamente com a evolução e maturação de seu conceito até chegar a sua definição matemática formal. Utilizamos frações contínuas para representar os números reais, classificar números irracionais, bem como algumas de suas aplicações na resolução de problemas, que vão de aproximações de números reais por números racionais, resolução de equações diofantinas lineares de duas variáveis, cálculo de raízes numéricas, resolução de equações exponenciais e logarítmicas, resolução de problemas de Geometria. Além disso, apresentamos o que consideramos serem problemas clássicos resolvidos por frações contínuas, são eles: construção de engrenagens, análises de eclipses lunares, e análises da construção de calendários.

Palavras-chave: Palavras-chave: Frações contínuas. Representação de números reais. Aproximações.

ABSTRACT

In this work we make a presentation on continued fractions, from its intuitive historical origin, along with the evolution and maturation of their concept to get your formal mathematical definition. We use continued fractions to represent the real numbers, sort irrational numbers, as well as some of its applications in solving problems ranging from real numbers approximations by rational numbers, solving linear Diophantine equations in two variables, calculation of numerical roots resolution exponential and logarithmic equations, solving geometry problems. In addition, we present what we consider to be classic problems solved by continued fractions, they are: construction of gears, analysis of lunar eclipses, and analysis of construction schedules.

Keywords: Continued fractions . Representation of real numbers. Approximations.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

1 Introdução

Apesar de ninguém saber como, nem quando a Matemática começou, indícios antropológicos indicam aproximadamente quando o homem começou a representar as ideias matemáticas relacionadas a números. Segundo Berlingghoff (2010,p.6): "Ninguém sabe quando começou a matemática. O que sabemos é que toda civilização que desenvolveu a escrita também mostra evidências de algum nível de desenvolvimento matemático."

1.1 Sistemas de contagem primitivos

Os sistemas de contagem primitivos eram formas materiais de se representar os números por meio de pedras, de nós, de talhes em ossos, de riscos nas paredes das cavernas, etc.

Entre 5 000 000 a.C. e 30 000 a.C. viveram os hominídeos: *Austolopithecus*, ancestral africando do homem , *Homo erectus*, que viveu na China por volta de 400 000 a.C., *Homo neanderthalensis*, que viveu na Europa e no Oriente Médio a cerca de 110 000 anos e 35 000 a.C. e o *Homo sapiens*, que substituiu as moradias em cavernas por estruturas móveis. Nesta época, o homem tentava se defender da intempéries vivendo em pequenos grupos, morando em grutas e cavernas. Ele se mantinha com o que encontrava na natureza, frutas, folhas, raízes e da caça a animais.

> "Os primeiros povos viviam da caça de pequenos animais selvagens, e das frutas, castanhas e raízes que colhiam. habitavam, em geral, os espaços abertos das savanas, verdadeiros oceanos de uma erva alta que cobria a maior parte das porções habitáveis da África, sul da Europa, sul da Ásia e América Central. Eram nômades, e constantemente se deslocavam de um lugar para outro à procura de alimento e em resposta às mudanças climáticas"
>
> (EVES, 2008, p.22)

Apesar das condições difíceis, o homem progredia cientificamente impulsionado pelas necessidades impostas pela convivência em grupo, precisava dividir víveres, fazer anotações.

> "As pessoas comerciavam entre si e havia necessidade de anotar a parte de cada família na caçada, ambas as atividades dependiam da ideia de contar, um prelúdio do pensamento científico. Alguns povos da idade

> da Pedra tinha calendários pictográficos que registravam várias décadas de história. Todavia, afora os sistemas de contagem primitivos, tudo o mais teve de esperar o desenvolvimento da agricultura."
>
> (EVES, 2008, p.23)

É importante ressaltar que nos sistemas primitivos de contagem não havia padronização nem do instrumento utilizado, nem da forma de contar. Não havia também uma "convivência" entre os objetos contados e os registros feitos, pois e a anotação era feita de forma esporádica. Um osso de caçador com 6 talhes não indica necessariamente que os animais foram mortos numa mesma caçada, isso pode ter ocorrido em um dia, em um mês, em um ano ou em uma década.

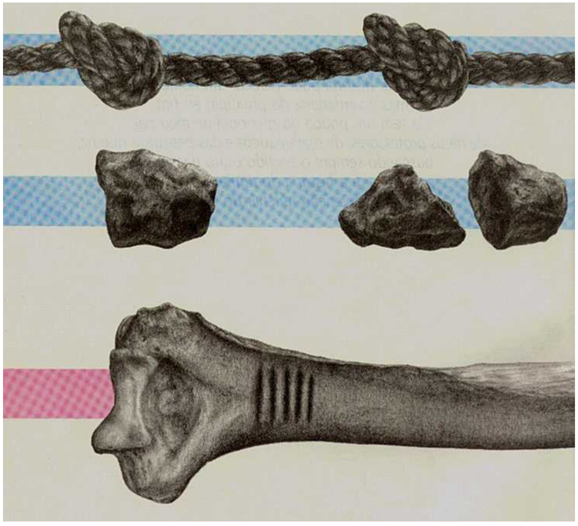

Figura 1.1: Sistemas de contagem primitivos

Fonte: Disponível em http://usuarios.upf.br/ pasqualotti/hiperdoc/ossos.jpg

Portanto, a cerca de 30 mil anos, para fazer registros relacionados a quantidade o homem fazia marcas em varas ou ossos, dava nós em cordas, usava pedras.

1.2 Sistemas concretos de numeração

São formas materiais de contar objetos com o uso outros objetos. Começou a se desenvolver há mais ou menos 10 mil anos, quando o homem criou a agricultura e domesticou animais. Essas atividades fizeram com que o homem deixa-se de ser nômade e passasse a construir a própria moradia. Surgiram as primeiras comunidades, os chefes e a divisão do trabalho. Conhecimento sobre o tempo, sobre as estações do ano, sobre matemática, se tornaram importantes. O pastor de ovelhas, levava o rebanho pela manhã para pastar, e o recolhia à noite ao curral. Como controlar do rebanho? Isto é, como ele sabia que a quantidade ovelhas ao sair era igual a quantidade de ovelhas ao chegar? Simples, ele usava pedras fazendo a comparação de um para um. Essa forma de contar se chama de sistema numérico concreto.

Figura 1.2: Pastor de ovelhas

Fonte: Disponível em http://usuarios.upf.br/ pasqualotti/hiperdoc/pastor.jpg

Os registros em artefatos dessa época mostram que os traços estão dispostos de forma intencional, denotando organização na forma de agrupar. Para alguns antropólogos muitos revelam padrões aritméticos, como estes no osso de Ishango.

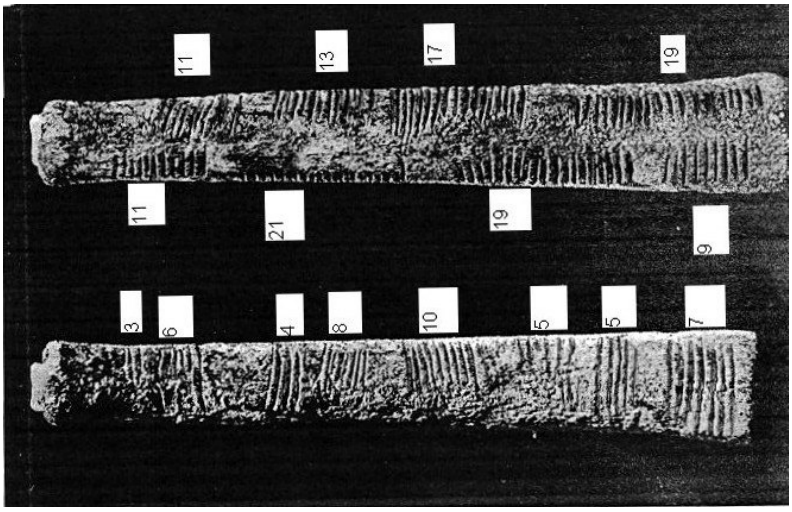

Figura 1.3: Osso de Ishango, frente e verso

Fonte: Disponível em http://www.fisica-interessante.com/image-files/ishango_bone.jpg

1.3 Sistemas de numeração simbólicos

Quando as comunidades humanas aprenderam a usar o bronze para produzir ferramentas e armas há cerca de 4 mil anos, as aldeias começaram a se transformar em cidades, houve crescimento, dinamismo e veio a complexidade urbana. A agricultura passou a produzir além do necessário e algumas pessoas puderam se dedicar a outras atividades, surgiram os artesãos, os sacerdotes, os administradores, e a escrita como consequência. O desenvolvimento progressivo fez surgir a engenharia, urbanização, o comércio e indústria que exigiam uma forma mais prática e segura de se fazer cálculos. Os sistema numéricos concretos se tornaram insuficientes. Para fazer cálculos rápidos e precisos, surgiram os sistemas de numeração simbólicos. Cada elemento do conjunto de símbolos usado para representar número é chamado de numeral

Figura 1.4: Numerais egípcios, romanos e chineses

Fonte: Disponível em http://www.iejusa.com.br/cienciaetecnologia/matematica.php.

Na Figura (1.4) temos exemplos de numerais indianos, romanos e chineses, mas esses povos não foram os únicos. Cada cultura que se desenvolveu criou seus próprios numerais, suas próprias regras operatórias, e assim cada uma delas tinha seu próprio sistema de numeração:

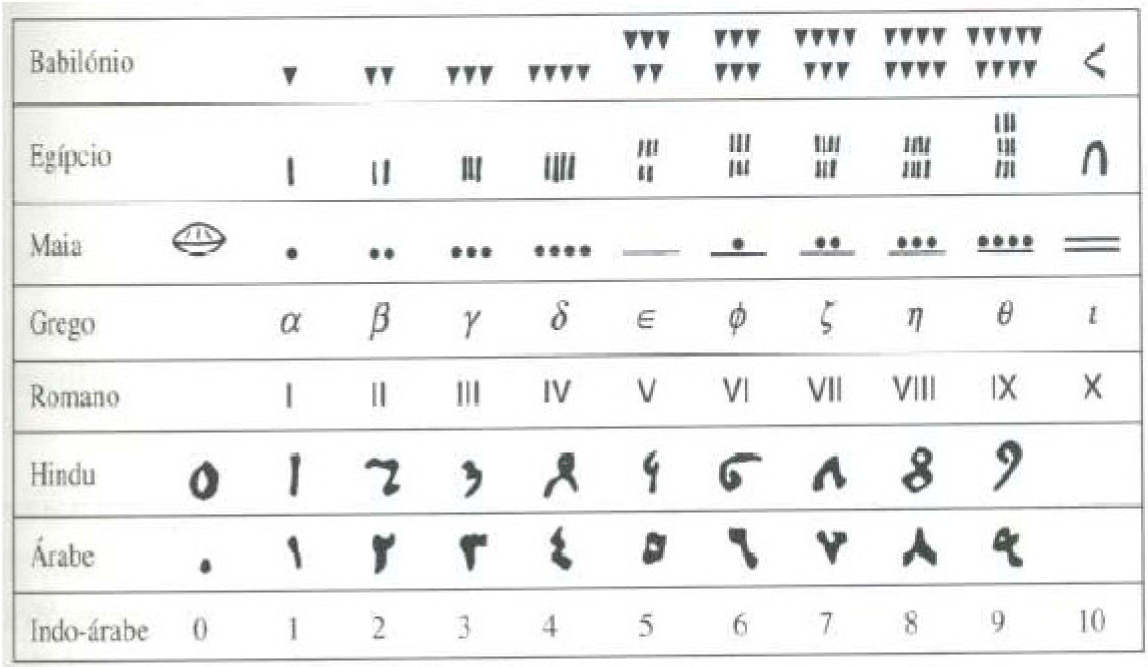

Figura 1.5: Sistemas de numeração

Fonte: Disponível em http://image.slidesharecdn.com/aulas8e9-sistemasdenumerao-121025095857-phpapp01/95/aulas-8-e-9-sistemas-de-numerao-30-638.jpg?cb=1351349842

A atividade comercial cada vez mais intensa entre os povos exigia praticidade tanto na representação das quantidades quanto nas operações aritméticas advindas das transações comerciais. As características do sistema de numeração hindu fizeram com esse sistema se sobressaísse aos demais. Os árabes foram os grandes divulgadores do sistema de numeração hindu, não apelas pelo tino comercial, mas também em virtude de seus grandes matemáticos.

> “A denominação **indo-arábico** para nosso sistema de numeração deve-se ao fato de seus símbolos terem sido inventados pelo antigo povo indiano e divulgado e aperfeiçoado pelos árabes.
> Abu Jafar Muhamed Ibn Musa al-Khwarizmi, matemático, astrônomo e geógrafo muçulmano do século IX, foi um dos responsáveis pela divulgação do sistema de numeração indo-arábico na Europa. Seus trabalhos de aritmética, álgebra e geometria foram traduzidos para o latim e influenciaram definitivamente o Ocidente”
>
> (Centurión, 1994, p.32).

Portando, da representação dos números por meio de materiais concretos deu lugar aos sistemas de numeração.

1.4 Sistema de numeração hindu-arábico

O sistema de numeração indo-arábico sofreu mudanças significativas até chegar ao formato como o temos hoje.

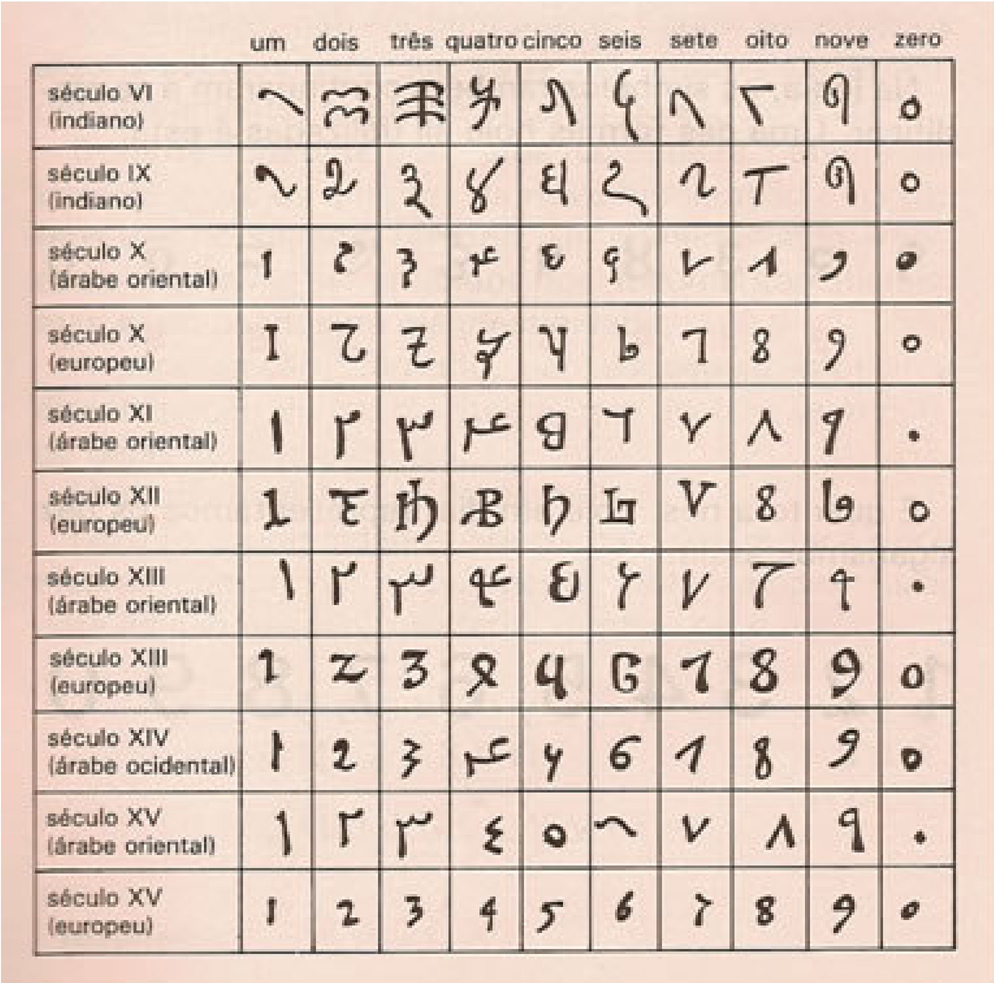

Figura 1.6: Evolução do sistema de numeração indo-árabe

Fonte: Disponívem em http://www.iejusa.com.br/cienciaetecnologia/matematica.php

Umas das características desse sistema de numeração é o fato dele ser decimal. Segundo CENTURIÓN,

> "A palavra decimal tem sua origem na palavra latina 'decem', que significa dez, pois assim como vários sistemas de numeração antigos, nosso atual sistema tem base dez, ou seja, os agrupamentos são sempre feitos de dez em dez". (CENTURIÓN, 1994, p.32)

Na Síria do século V, os centros de cultura helênica procuram discutir a arte e cultura exclusivamente vindas da Grécia. Irritado com o endeusamento de tudo que vinha da de Grécia, um bispo sírio vociferou:

> "Existem outros povos que também sabem alguma coisa! Os hindus, por exemplo, têm valiosos métodos de cálculos. São métodos fantásticos! E imaginem que os cálculos são feitos por apenas nove sinais!"
> (Severus Sebokt, 662).

Além de ser decimal, o sistema de numeração indo-arábico

1. é **posicional** porque o mesmo símbolo representa valores diferentes, dependendo da posição que ocupa no numeral. Por exemplo, no numeral 232 o algarismo 2 tem valor posiconal 200 e valor posicional 2;

2. utiliza o **zero** para indicar uma "casa" ou "posição" vazia entre os agrupamentos de dez do número considerado;

3. é **multiplicativo** porque num mesmo numeral algarismos algarismos iguais que estão juntos, o da esquerda é dez vezes mais que o da direita. Por exemplo: $447 = 4 \times 100 + 4 \times 10 + 7$.

4. é aditivo porque o valor do número é obtido pela adição dos valores posicionais que os símbolos adquirem nos respectivos lugares que ocupam. Por exemplo: $447 = 400 + 40 + 7$

Notamos que os números inteiros são bem representados no sistema de numeração indo-arábico, no sentido de que não é necessário criar conceitos a partir da representação. Isso não ocorre com as representações de número racionais não inteiros. Por exemplo $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$. A primeira dessas frações é dita *irredutível*, as demais *redutíveis*, e todas elas são *equivalentes*. A questão que se coloca é: esses conceitos são referentes ao número representado ou decorrem de sua representação?

1.5 Características decorrentes do sistema de numeração

Na representação decimal cada número real pode ser classificado como *decima exato*, quando as casas após a vírgula é finita, ou como *dízimas*, quando as casas após a vírgula são infinitas. As dízimas, por sua vez, são classificadas em *periódicas* ou *não-periódicas*.

- $2,4$ decimal exato;
- $-3,222\ldots$ dízima periódica;

- $7,1234567891011\ldots$ dízima não periódica.

É possível mostrar que todo decimal exato representa uma dízima periódica. Por exemplo, $0,5 = 0,4999\ldots$. Assim, dada uma dízima, o número representado por ela é racional ou irracional? Costumeiramente, dizemos que todo número racional tem uma representação através de dízima periódica, e os números irracionais tem uma representação através de dízima não-periódica. Essa não é uma boa forma de caracterizar os números irracionais porque um conceito cunhado na negação de outro apenas permite a verificação, o que pode ser muito trabalhoso; dizer que um número irracional constitui uma dízima não-periódica, não é vantajoso, porque, entre outras coisas, é muito difícil encontrar essa dízima, e ainda mais saber se ela é periódica ou não. Colocações como essa não satisfazem o espírito questionador dos estudantes.

Outro fato a se considerar é que as dízimas dependem da base do sistema numérico. Qualquer fração racional irredutível que leve no denominar fatores diferentes de 2 e 5 gera uma dízima. Por exemplo, $\frac{7}{6} = 1,1666\ldots$. Já na base 6, esse mesmo número representado por $1,1_6$. Portanto o conceito de dízima não é intrínseco aos números. A questão é se existe uma forma de representar os números reais que independa da base do sistema numérico? Se existe, é uma representação com vantagens significativas sobre os sistemas numéricos simbólicos? A Resposta é sim, são as representações numéricas via frações contínuas, mediante a qual se pode analisar e extrair a estrutura interna de qualquer número real, seja ele racional ou irracional.

O conceito de fração contínua é a resposta ao anseio do homem de encontrar uma representação numérica "matematicamente pura". Para termos uma ideia de como ficam os números representados por frações contínuas, consideremos a representação decimal com vírgula, uma das mais utilizadas. O número 3 pode ser escrito de várias maneiras, sejam: $3 = 3,0$ ou $3 = 3,00$ ou $3 = (3,0,0,0...)$. O número $0,65$ pode ser escrito assim: $(0,6,5)$ e $4,1 = (4,1)$ ou $4,1 = (4,1,0,0,0,...)$ e $\pi = 3,141592\ldots$ pode ser escrito assim $(3,1,4,1,5,9,2,...)$. O que, quanto a clareza, não há problema. Assim, qualquer número decimal constitui uma sequência de dígitos em que o primeiro deles representa a parte inteira. Em frações contínuas a representação é semelhante, por exemplo $\sqrt{2} = [1,2,2,2...]$. Como encontramos essa representação é o que veremos neste trabalho.

Diferentemente das outras representações, as frações contínuas fornecem propriedades que dão origem a métodos diversos, por exemplo, para resolver equações diofantinas, para fazer aproximações racionais de números racionais, com a certeza de que essas aproximações são as melhores que existem.

Neste trabalho buscamos apresentar uma introdução ao estudo das frações contínuas, com aplicações em resolução de problemas, que possa ser utilizada no Ensino Básico. Mostramos no Capítulo 1 que a representação simbólica dos números tem consumido esforços do ser humano ao longo do tempo, e que essa busca o levou às frações contínuas. No Capítulo 2 Apresentaremos alguns fatos históricos relacionados às frações contínuas. No Capítulo 3 apresentaremos definições importantes e a relação entre frações contínuas, números racionais e números irracionais. No Capítulo 4 veremos algumas aplicações como, por exemplo, no cálculo de raízes, exponenciais, logaritmos, soluções de equações diofantinas, e aplicações à geometria. Apresentaremos também alguns problemas clássicos que motivaram o estudo de frações contínuas ao longo dos anos.

2 Aspectos Históricos

Citaremos alguns aspectos interessantes da história das frações contínuas. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados nas referências [2], [4], [5], [8], [9], [16].

É difícil dizer com exatidão onde estão os traços mais antigos sobre frações contínuas, porque, apesar de muitos resultados aritméticos estarem associados a esse conceito, o que se percebe é que os estudiosos da antiguidade não deram um tratamento sistemático sobre esse assunto. O método de Euclides que permite encontrar o máximo divisor comum entre dois números naturais equivale essencialmente ao desenvolvimento de uma fração contínua aritmética limitada e constitui, segundo os historiadores da matemática, o passo mais importante, ocorrido por volta de 300 a.C, no sentido do desenvolvimento da ideia de fração contínua.

Téon de Alexandria, filósofo, um comentador matemático e astrônomo grego do fim do século IV d.C, deixou vestígios do procedimento conceitual de frações contínuas em um de seus cometários sobre o livro *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu. Neles Téon procura resolver o problema de encontrar, de modo aproximado, o lado de uma superfície quadrada que não tem raiz exata. Pode-se considerar que a solução de Téon para esse problema contém a ideia embrionária de frações contínuas.

O extraordinário matemático Aryabhata (476 - 550), reconhecido como autor do mais importante texto matemático indiano *Ariabatiia*, publicado no ano de 499, segundo Boyer, apresenta neste texto uma tentativa de resolver, de forma geral, uma equação linear indeterminada. Nessa tentativa, ele faz uso de uma técnica que muito se aproxima do conceito de frações contínuas. Aryabhata utilizou essa técnica para encontrar aproximações precisas de números irracionais. É desse matemático o procedimento: "Some quatro a cem, multiplique por oito e então adicione sessenta e dois mil. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo de diâmetro vinte mil."Essa regra estabelece a relação entre o diâmetro e a circunferência de um circulo que permite concluir que $\pi = 3,1516$, correto para as quatro casas decimais.

Brahmagupta (598-668) matemático e astrônomo indiano, entre seus feitos incomuns, encontrou a solução geral de uma equação diofantina, aprofundou-se no estudo das equações que hoje são conhecidas como *Equações de Pell*, desenvolveu os fundamentos do método chakravala (um método interativo que permite resolver equações diofantinas de grau 2). Fez isso usando cálculos parecidos aos das frações contínuas. Investigou a resolução da equação $x^2 - 61y^2 = 1$, e encontrou sua menor solução: x = 1 766 319 049 e y = 226 153 980.

O método chakravala foi melhorado no século XII por Bhaskara Acharia (1114-1185), matemático e astrônomo indiano. Um algoritmo, análogo ao das frações contínuas, permitiu resolver um caso geral.

Leonardo de Pisa, chamado de Fibonacci (1170 - 1250), matemático italiano, no seu livro *Liber Abbaci* publicado em 1202, estudou técnicas que se avizinham substancialmente do conceito de frações contínuas ascendentes, isto é, frações contínuas que modernamente tem a forma

$$x = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cdots}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

Ibn-Al Banna al-Murrakushi (1256 - 1321), matemático e astrônomo marroquino, considerado um grande compilador de conhecimentos matemáticos, no trabalho intitulado *Raf al-Hijab*, apresenta uma teoria de frações contínuas. Conhecendo os trabalhos desse autor, o árabe Abu'l Hasan Al-Qalasadi (1412-1486), num tratado de 1463, e Luca Pacioli ($1445 - 1517$), matemático italiano, que em 1494 publica *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, considerado um resumo da matemática conhecida na época, recuperam as ideias de Fibonacci sobre frações contínuas.

A grande maioria dos estudiosos de História da Matemática estão de acordo quanto a considerar que a teoria moderna das frações contínuas surgiu com Rafael Bombelli, matemático italiano da cidade de Bolonha que dedicou um capítulo de seu tratado *l'Algebra*, de 1572, para o cálculo de raízes quadradas, onde aparece, em símbolos modernos, a seguinte igualdade:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{\ddots}}}}$$

inegavelmente uma fração contínua generalizada.

Tudo indica que Bombelli conhecia a regra geral:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{\ddots}}}}$$

válida para $a^2+b \geq 0$. Todavia, pelo que se sabe, ele não se aprofundou por esse caminho.

Quem percebeu que o método de Bombelli servia para determinar qualquer raiz quadrada foi Pietro Antonio Cataldi (1458-1626), outro matemático italiano também de Bolonha. Ele desenvolveu um algoritmo de frações contínuas e o utilizou para calcular a raiz quadrada de 18. Além disso, notou que as aproximações sucessivas eram alternativamente superiores e inferiores que a raiz quadrada buscada. Em 1613 publicou seu tratado sobre a teoria das raízes *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri.*

Para extrair a raiz quadrada de um número natural n, Cataldi procedia assim:

$$n = q^2 + r$$

onde q é o maior inteiro em que q^2 não supera n e $r = n - q^2$. Feito isso, ele sugeria que se aceitasse q como aproximação para raiz quadrada de n o valor

$$\sqrt{q^2+r} = q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{\ddots}}}}$$

Aqui percebemos a consciência de Cataldi sobre esse processo generalizado, demonstrando que ele estava seguro da validade desse procedimento para quaisquer n, q e r naturais.

Como exemplo, Cataldi escreve, o que em notação moderna fica assim:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{\ddots}}}}$$

Da obra de Cataldi emergi um procedimento interativo eficiente, elegante e com espírito moderno. Essas características levaram as frações contínuas a serem consideradas, pelo também matemático italiano, e estudioso da História da Matemática, Ettore Bortolotti (1866, 1947), como “os primeiros passos para a generalização do conceito de número (até então restrito a apenas ao universo racional) e a partir do advento do método infinitesimal". Em 1929 Bortolotti publicou os livros 4 e 5 de *Algebra* de Rafael Bombelli.

O matemático alemão Daniel Schwenter (1585-1636), vinculado a universidade Altdorf, na Alemanha, em seu tratado *Geometrica Practica* calcula as aproximações para o número racional $\frac{177}{233}$ através da determinação do máximo divisor comum entre 177 e 233. Ele encontra as seguintes aproximações, chamadas de reduzidas: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{19}{25}, \frac{79}{104}$. A partir de então, nos séculos seguintes, muitos matemáticos de renome se dedicaram ao estudo das frações contínuas, muitas realizações e muitos procedimentos são desenvolvidos e aperfeiçoados.

Na Inglaterra, um acontecimento provocou um progresso decisivo: em 3 de janeiro de 1657, Pierre de Fermat desafiou os matemáticos europeus com vários problemas, entre os quais se encontrava a equação resolvida por Brahmagupta. A resposta foi rápida, William Brouncker (1620-1684), matemático inglês, primeiro presidente da *Royal Society* encontrou a relação entre a equação e a fração contínua correspondente, e também um método algorítmico equivalente ao dos indianos que permitia calcular a solução. Ele também fez uso de frações contínuas e construiu uma sequência que convergia para $\frac{\pi}{4}$, transformando o produto de Wallis

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \ldots}$$

em

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ddots}}}}}$$

e com isso, calculou π com dez casas decimais exatas.

John Wallis (1616 - 1703), nascido na Inglaterra, foi o primeiro a aprofundar esse tema, publicando em 1656 o livro *Arithemetica infinitorium*, onde consta muitas propriedades da frações contínuas e os resultados de Brouncker,que foi seu aluno. Wallis aproveitou para demostrar as relações de recorrência usadas por este e Bhaskara Acharia. É de Wallis o mérito de ter usado pela primeira vez a expressão frações contínuas na frase: "Nempe si unitati adjungatur fractio, quae denominatorem habeat continue fractum".

Por esta época, outro grande cientista, Christiaan Huygens (1629-1695), um dos protagonistas do desenvolvimento científico do século XVII, descobriu que as frações contínuas constituem a ferramenta ideal para determinar o número de dentes que devem ter as engrenagens de um relógio.Também as usou para construir planetário mecânico autômata. Em sua obra *Opuscoli postumi* se encontra um exemplo de desenvolvimento em fração contínua de um número real racional baseado no algoritmo de divisão euclidiana.

Depois disso, no século seguinte, Leonhard Euler (1707 - 1783), matemático suíço, o mais prolífero dos matemáticos; Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), matemático alemão, Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), matemático italiano, e muitos outros, desenvolveram a teoria das frações contínuas de forma orgânica e sistemática como a conhecemos hoje. Eles resolveram alguns problemas teóricos e, observando o fato de que a fração contínua associada a equação de Pell, é periódica a partir de certo ponto, passaram a crer que frações contínuas permitiriam solucinà-la.

Leonhard Euler, em seu livro *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, o primeiro texto abrangente que explica de modo sistemático algumas propriedades de frações contínuas, demonstrou que os racionais são escritos como frações contínuas finitas, e provou que a representação dos irracionais na forma de fração contínua é infinita. Também demonstrou que, se um número tem uma fração contínua periódica, então é solução de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. Euler escreveu

$$\frac{e-1}{2} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

e comentou: "Ora, como os números racionais têm um desenvolvimento limitado em fração contínua , e apenas os racionais, então se o número $\frac{e-1}{2}$ tem expansão em fração contínua infinita, ele não pode certamente ser racional e , por conseguinte , nem mesmo e." E assim demonstrou a irracionalidade de e (Greco, 2012).

Na obra *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Johann Heinrich Lambert dá um tratamento essencial para pesquisas em frações contínuas. Ele encontrou novos usos para essa teoria e as utilizou para demonstrar, pela primeira vez na história, que π é um número irracional. Lambert expressou a $tg(x)$ em frações contínuas da seguinte forma

$$tg(x) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \cdots}}}}$$

ele sabia que, se x fosse racional, $tg(x)$ seria irracional. Como $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, Lambert concluiu que π é irracional.

Joseph-Louis de Lagrange, que foi orientando de Euler, demonstrou em 1770 que as raízes irracionais de equações quadráticas com coeficientes inteiros têm expansão na forma de fração contínua periódica e que se um número é expresso por uma fração contínua periódica, então é solução de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. A partir de então, surgiu uma nova denominação, esses números passaram a ser chamados de irracionais quadráticos. Dessa forma, as frações contínuas permitiram caracterizar melhor esses números, e mostrou que eles constituem um conjunto bem definido dentro do universo dos números irracionais.

Entre os muitos gênios da matemática que se ocuparam desse tema, seja desenvolvendo-o ou aplicando-o em suas pesquisas, ainda encontramos Évariste Galois (1811 - 1832), matemático francês, que em abril de 1829, no seu primeiro texto publicado, *Demonstration d?un theoreme sur les fractions continues periodiques*, encontra uma condição necessária e suficiente para que uma fração contínua seja imediatamente periódica. Joseph Liouville (1809 - 1882), matemático francês que através do uso de frações contínuas deu os primeiros exemplos de números transcendentes. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918), matemático nascido na Rússia, demonstrou que os pontos de um seguimento de reta podem ser colocados em bijeção do interior de um quadrado com a ajuda de frações contínuas. Brezinski , Jacobi, Perron , Hermite , Cauchy , Stieltijes, Felix Klein, também deram notáveis contribuições .

São muitos e extraordinários os matemáticos de diversas áreas que se dedicaram ao estudo das frações contínuas, o que mostra que essa temática é riquíssima por si mesma, mas também por conectar os vários campos da matemática. Há quem diga que frações contínuas acabam por formar a ponte infinita entre o discreto e contínuo, e estabelecem a conexção definitiva entre as grandezas racionais e irracionais, iluminando as relações estreitas entre esses dois mundos aparentemente desconexos, tidos milenarmente como intransigentes um para com o outro, e contribui para eliminar com a tensão entre o discreto e contínuo.

3 Frações Contínuas e Números Reais

No sistema de numeração decimal posicional, todo número real α pode ser decomposto em duas partes: uma inteira e outra decimal. A parte decimal, isto é, compreendida entre zero e um, é chamada de *mantissa*. Assim, no número $3,21$ a mantissa é $0,21$. Se representamos a parte inteira de um número real qualquer por a_0, a mantissa é uma sequência de dígitos $a_1a_2a_3...a_n...$ que pode ser finita ou infinita, conforme o número seja um decimal exato, ou uma dízima.

Sem perda de generalidade, podemos representar a mantissa assim:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots,\ a_n,\ \ldots)$$

Se agora agregarmos à mantissa a parte inteira, qualquer número real pode ser representado assim:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

.

Definição 3.1. Todo número real pode ser representado por uma sequência

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

em que a_0 é um número inteiro qualquer, e os demais: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ pertencem ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Abaixo mostramos a ligação entre essa definição e a forma polinomial de um número no sistema de base dez.

- $321 = 300 + 20 + 1 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 1 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 = (321)$
- $32,1 = 30 + 2 + 0,1 = 3 \times 10 + 2 \times 1 + \dfrac{1}{10} = 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} = (32,1)$
- $3,21 = 3 + 0,2 + 0,01 = 3 \times 1 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{100} = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} = (3,2,1)$

Assim, podemos fazer uma correspondência entre um número real e a sequência que o representa, sendo que o primeiro desses, a_0 pode ser qualquer número inteiro, e os demais são dígitos. Isso é relatado aqui porque a representação via frações contínuas é muito similar a essa ideia, com poucas diferenças na apresentação, mas com muitas diferenças na forma como os termos da sequência são obtidos, nos seus significados, nas suas interpretações e nas suas aplicações.

3.1 Definição de Fração Contínua

> "Fractionem autem continuam voco eiusmodi fractionem, cuius denominator constat ex numero integro cum fractione, cuius denominator denuo est aggregatum ex integro et fractione, quae porro simili modo sit comparata, sive ista affectio in infinitum progrediatur sive alicubi sistatur."
>
> Leonhard Euler

Em matemática, *Fração contínua simples de ordem* n é toda expressão da forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{3.1}$$

em que a_0 é um número inteiro, e os demais a_i $(i = 1, \ldots, n)$ são estritamente positivos.

Definição 3.2. Se chama *fração contínua (aritmética) simples limitada* uma sucessão que se escreve

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} := [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

para a qual vale as seguintes regras:

$$[a_0] = a_0$$

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$[a_0; a_1, a_2] = [a_0; [a_1, a_2]] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, [a_{n-1}, a_n]]$$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, [a_h, \ldots, a_n]] \qquad (1 \leq h \leq n-1)$$

Os elementos $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, que são números reais, são chamados *termos* ou *quocientes parciais* da fração contínua. A fração contínua se diz *aritmética simples* se todos os a_i são números inteiros positivos, com exceção de a_0, que pode ser negativo. Devido a escrita

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

ser trabalhosa e incômoda, formas mais convenientes de se escrever essa expressão foram pensadas. Uma delas é:

$$a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{a_i+}\cdots\frac{1}{a_n}$$

Em que o sinal + que segue o primeiro é escrito mais em baixo para lembrar que a escrita é em declive. Assim, temos:

$$4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}} = 4 + \frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{5}$$

A origem dessa notação está na forma como o matemático alemão Alfred Pringsheim $(1850 - 1941)$ anotava suas frações contínuas:

$$a_0 + \frac{1\,|}{|\,a_1} + \frac{1\,|}{|\,a_2} + \frac{1\,|}{|\,a_3} \cdots$$

Porém, $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ é a notação mais usada.

Definição 3.3. Seja α um número racional, e seja $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ uma fração contínua finita. Se temos

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

dizemos que o número α é *valor* da fração contínua, e escrevemos: $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

3.2 Frações Contínuas e Números Racionais

Entre os muitos procedimentos de expressar um número racional $\frac{a}{b}$ em frações contínuas, o algoritmo de Euclides para calcular o MDC (máximo divisor comum) de a e b é o melhor deles. Como se sabe, esse algoritmo está descrito no livro VII de *Os Elementos* de Euclides, para muitos, mais célebre texto matemático da história humana.

Vamos fazer um exemplo para mostrar a relação entre o algoritmo de Euclides e a teoria das frações contínuas.

Exemplo 3.1. Aplique o algoritmo de Euclides aos números naturais 22 e 7 e obtenha a representação do número racional $\frac{20}{7}$ em fração contínua.

Solução. Primeiro efetuamos a divisão euclidiana e escrevemos as igualdades:

$$\begin{aligned} 20 &= \mathbf{2} \times 7 + 6 \\ 7 &= \mathbf{1} \times 6 + 1 \end{aligned}$$

O último resto não nulo é 1, o que nos diz que o $MDC(22, 7) = 1$

$$\frac{20}{7} = \mathbf{2} + \frac{6}{7} \qquad (1)$$

$$\frac{7}{6} = \mathbf{1} + \frac{1}{6} \qquad (2)$$

Observemos que a igualdade (1) termina em fração, e esta fração invertida começa a igualdade (2). Pode-se eliminar as frações intermediárias e exprimir a fração original na forma:

$$\frac{20}{7} = \mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{1} + \frac{1}{\mathbf{6}}}$$

.

Essa expressão é chamada de *fração contínua finita*, que também tem a seguinte notação;

$$\mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}} = [\mathbf{2;1,6}]$$

Os termos 2, 1, 6 também podem ser encontrados através do cálculo do MDC(20, 7):

	2	**1**	**6**
22	7	6	1
6	1	0	

Tabela 3.1: Cálculo do MDC(20,7)

É fácil notar que todo número racional pode ser escrito como uma fração contínua finita.

3.3 Número Racional Como Fração Contínua Finita

Naturalmente, toda fração contínua aritmética limitada é um número racional e todo número racional $\frac{p}{q}$, pode ser expresso mediante fração contínua aritmética limitada e essa representação, ou desenvolvimento, é essencialmente única. É o que garante o seguinte teorema fundamental.

A toda fração contínua simples finita corresponde um número racional e, reciprocamente, a todo número racional corresponde uma fração contínua simples finita

.

Demonstração. Por se tratar de uma fração contínua simples finita, a demonstração de, *a toda fração contínua simples finita corresponde um número racional*, é imediata.

Reciprocamente, se o número racional α for inteiro, então escreve-se $\alpha = \frac{a_0}{1} = [a_0]$. Neste caso tem-se uma *fração contínua degenerada.* Nada há mais o que demonstrar. Agora, se α é um número racional não inteiro, seja a_0 sua parte inteira e b_0 sua parte decimal. Assim, pode-se escrever: $\alpha = a_0 + b_0$. Como $b_0 < 1$, deduz-se que $\frac{1}{b_0} > 1$. Agora, faz-se $\dfrac{1}{b_0} = \alpha_1$ e daí conclui-se que $b_0 = \dfrac{1}{\alpha_1}$. Desse modo, $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$. Se α_1 for inteiro, faz-se $a_1 = \alpha_1$ e conclui-se:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Porém, se α_1 não for inteiro, ele próprio tem uma parte inteira e outra decimal, o que permite escrever: $\alpha_1 = a_1 + b_1$. Como $b_1 < 1$, deduz-se que $\dfrac{1}{b_1} > 1$. Agora faz-se $\dfrac{1}{b_1} = \alpha_2$, de onde vem que $b_1 = \dfrac{1}{\alpha_2}$. Assim, pode-se escrever $\alpha_1 = a_1 + \dfrac{1}{\alpha_2}$, e portanto: $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$. Se α_2 for inteiro, faz-se $a_2 = \alpha_2$, e conclui-se:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

Se α_2 não for inteiro, continua-se com esse procedimento até que um α_n seja inteiro, o que ocorre depois de um número finito de etapas. Então faz-se $\alpha_n = a_n$, e conclui-se que:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \\ a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Ou

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$$

□

Observação 3.3.1. Quando se desenvolve um número racional em frações contínuas, para garantir a unicidade da representação, é importante que o último inteiro a_n seja maior que 1. Se assim não for, haverá duas representações:

$$[2;1,3,5] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}}} = [2;1,3,4,1]$$

No exemplo a seguir mostra-se como usar o algoritmo de Euclides para encontrar os elementos da fração contínua.

Exemplo 3.2. Encontrar a expansão do número $\dfrac{1977}{847}$ em fração contínua.

Solução. Observe que

$$\begin{array}{ccccccc}
1\,977 & = & \mathbf{2} & \times & 847 & + & 283 \\
847 & = & \mathbf{2} & \times & 283 & + & 281 \\
283 & = & \mathbf{1} & \times & 281 & + & 2 \\
281 & = & \mathbf{140} & \times & 2 & + & 1 \\
2 & = & \mathbf{2} & \times & 1 & + & 0
\end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{1977}{847} & = & \mathbf{2} & + \dfrac{283}{847} \\
\dfrac{847}{283} & = & \mathbf{2} & + \dfrac{281}{283} \\
\dfrac{283}{281} & = & \mathbf{1} & + \dfrac{2}{281} \\
\dfrac{281}{2} & = & \mathbf{140} & + \dfrac{1}{\mathbf{2}}
\end{array}$$

Pode-se eliminar as frações intermediárias e exprimir a fração original na forma:

$$\frac{1977}{847} = \mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{140} + \cfrac{1}{\mathbf{2}}}}},$$

ou ainda

$$\frac{1977}{847} = [\mathbf{2;2,1,140,2}].$$

Usando o algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC(1977, 847), temos:

	2	**2**	**1**	**140**	**2**
1977	847	283	281	2	1
283	281	2	1	0	

Tabela 3.2: Cálculo do MDC(1847, 847)

3.4 Convergentes de uma fração contínua simples

Definição 3.4. Dada uma fração contínua finita qualquer

$$\alpha = [a_0; a_1, a_3, \ldots, a_n],$$

chama-se *m-ésimo convergente de* α, ou *m-ésima fração reduzida* ou (*m-ésima reduzida*) de α, cada fração contínua $c_m = [a_0; a_1, a_3, \ldots, a_m]$, com $0 \leq m \leq n$. Dese modo,

$c_0 = a_0$ é a reduzida de ordem zero,

$c_1 = [a_0; a_1] = \dfrac{a_0a_1 + 1}{a_1}$ é a reduzida de ordem 1.

$c_2 = [a_0; a_1, a_2] = \dfrac{a_0a_1a_2 + a_2 + a_0}{a_1a_2 + 1}$ é a reduzida de ordem 2.

$c_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = \dfrac{a_0a_1a_2a_3 + a_0a_1 + a_0a_3 + a_2a_3 + 1}{a_1a_2a_3 + a_1 + a_2}$ é a reduzida de ordem 3. E assim por diante.

Exemplo 3.3. Determinar as frações reduzidas do número racional $\dfrac{43}{30}$.

Solução. Os covergentes de $\dfrac{43}{30}$ são $[1], [1; 2], [1; 2, 3], [1; 2, 3, 4]$. As reduzidas, por definição, são racionais que podem ser indicados por

$$c_m = \frac{p_m}{q_m}$$

onde p_m e q_m são inteiros não nulos primos entre si. De acordo com a regra acima, temos:

$c_0 = 1,$

$c_1 = [1; 2] = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2},$

$c_2 = [1; 2, 3] = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{7}{3}} = 1 + \dfrac{3}{7} = \dfrac{10}{7}$

$c_3 = [1; 2, 3, 4] = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{13}{4}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{4}{13}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{30}{13}} = 1 + \dfrac{13}{30} = \dfrac{43}{30}$

Esse processo com base na definição acima, pode mostra-se muito trabalhoso. Uma maneira mais rápida de encontrar as reduzidas é garantida pelo seguinte teorema

Teorema 3.1. Relações Recorrentes de Euler-Wallis

Se $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ *é um convergente da fração contínua finita* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$*, com* $n > 1$*, então valem as relações de recorência:*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \tag{3.2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \tag{3.3}$$

em que $p_{-1} = 1$ *e* $q_{-1} = 0$*.*

Demonstração. A prova será feita por Indução Matemática.

Inicialmente, temos: $c_0 = [a_0] = \dfrac{a_0}{1}$, $c_1 = [a_0; a_1] = \dfrac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$

Primeiro passo:

$p_1 = a_1 a_0 + 1 = a_0 p_1 + p_{-1}$ e $q_1 = a_1 = a_1 \cdot 1 + 0 = a_1 q_1 + q_{-1}$. O que mostra que as relações (3.2) e (3.3) são verdadeiras para $n = 1$.

Segundo passo: Assumindo, por hipótese de indução, que as mesmas são verdadeiras para $n = k$, sendo $k \in \mathbb{Z} - 1$ um número inteiro maior que 1.

Terceiro passo: Deve-se provar que essas proposições são verdadeiras para $(k+1)$, para isso, observemos que:

$$c_{k+1} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}] = \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right]$$

pois, ainda que $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ não seja necessariamente inteiro, a notação o permite, e tem-se que:

$$c_{k+1} \overset{H.I.}{=} \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \overset{H.I.}{=} \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

Assim, $p_{k+1} = a_{k+1}p_n + p_{k-1}$ e $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$.

Portando, as relações (3.2) e (3.3) são verdadeiras para todo inteiro $n > 1$. □

3.5 Lei de Formação das Reduzidas

Através das relações (3.2) e (3.3) é possível criar o seguinte esquema prático para calcular os convergentes de uma fração contínua:

Escrevemos uma tabela de três linhas e $n+2$ colunas. Na primeira coluna colamos, de cima para baixo, respectivamente, a_n, p_n e q_n.

a_n								
p_n								
q_n								

Começando da terceira coluna, preenchemos a primeira linha, da esquerda para direita, com os respectivos termos da fração contínua:

a_n		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\ldots$	a_n
p_n									
q_n									

Começando da segunda linha, preenchemos a segunda coluna, respectivamente por 1 (um) e zero.

a_n		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\ldots$	a_n
p_n	1							
q_n	0							

Terminamos de preencher a terceira coluna com a_0 e 1 (um) de cima para baixo, respectivamente.

a_n		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\ldots$	a_n
p_n	1	a_0						
q_n	0	1						

Para terminar de preencher a segunda linha, aplicamos a relação (3.2) e calculamos os numeradores das reduzidas:

Numerador da reduzida de ordem 1: $p_1 = a_1p_0 + p_{-1} \Rightarrow p_1 = a_1a_0 + 1 = a_0a_1 + 1$

Numerador da reduzida de ordem 2: $p_2 = a_2p_1 + p_0 \Rightarrow p_2 = a_2p_1 + a_0 = p_1a_2 + a_0$

Numerador da reduzida de ordem 3: $p_3 = a_3p_2 + p_1 = p_2a_3 + p_1$

$$\vdots$$

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} = p_{n-1}a_n + p_{n-2}$$

Formamos os numeradores das reduzidas multiplicando o numerador da reduzida anterior pelo quociente incompleto a que se chegou e somamos o resultado ao numerador da reduzida que precedente a reduzida anterior.

a_n		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\ldots$	a_n
p_n	1	a_0	a_0a_1+1	$(a_0a_1+1)a_2+a_0$	$p_2a_3+p_1$	$p_3a_4+p_2$	$\ldots$	$p_{n-1}a_n+p_{n-2}$
q_n	0	1						

Para terminar de preencher a terceira linha, aplicamos a relação (3.3) e calculamos os denominadores das reduzidas:

Denominador da reduzida de ordem 1: $q_1 = a_1q_0 + q_{-1} \Rightarrow q_1 = a_1 \cdot 1 + 0 = a_1$

Denominador da reduzida de ordem 2: $q_2 = a_2q_1 + q_0 \Rightarrow q_2 = a_2q_1 + q_0 = a_1a_2 + 1$

Denominador da reduzida de ordem 3: $q_3 = a_3q_2 + q_1 \Rightarrow q_3 = a_3q_2 + q_1 = q_2a_3 + q_1$

$$\vdots$$

$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} = q_{n-1}a_n + q_{n-2}$$

Formamos os denominadores das reduzidas multiplicando o denominador da reduzida anterior pelo quociente incompleto a que se chegou e somamos o resultado ao denominador da reduzida anteprecedente.

Tabela 3.3: Lei de formação das reduzidas

a_n		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\ldots$	a_n
p_n	1	a_0	$a_0a_1 + 1$	$(a_0a_1 + 1)a_2 + a_0$	$p_2a_3 + p_1$	$p_3a_4 + p_2$	$\ldots$	$p_{n-1}a_n + p_{n-2}$
q_n	0	1	a_1	$a_1a_2 + 1$	$q_2a_3 + q_1$	$q_3a_4 + q_2$	$\ldots$	$q_{n-1}a_n + q_{n-2}$

Exemplo 3.4. Encontre todas as frações reduzidas de $\dfrac{421}{130}$.

Solução. Para resolver o problema, fazemos uso do algorítimo de Euclides para o calcular o MDC(421, 130) e encontramos os quocientes parciais. Depois, com os quocientes parciais, usamos o procedimento da tabela (3.3) para encontrar as frações reduzidas.

Primeiro usamos o algoritmo de Euclides para encontrar os quocientes parciais:

	3	4	5	6
421	130	31	6	1
31	6	1		

Tabela 3.4: Algoritmo de Euclides para MDC(421, 130)

Agora usamos os quocientes parciais para encontrar as reduzidas:

a_n		3	4	5	6
p_n	1	3	13	68	421
q_n	0	1	4	21	130

Tabela 3.5: Aplicação do procedimento da tabela 3.3

Portanto, as reduzidas são: $3, \dfrac{13}{4}, \dfrac{68}{21}, \dfrac{421}{130}$.

$\square$

Os convergentes de uma fração contínua têm muitas propriedades, entre as quais destacamos as seguintes.

Teorema 3.2. *Se o n-ésimo convergente associado a fração contínua simples*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

é $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$*, para todo* $n \geq 1$*, então vale*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Por Indução Matemática sobre n, temos:

Primeiro passo: A proposição é verdadeira para $n = 1$, pois

$$p_1 q_0 + p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^{1-1}$$

Segundo passo: Admita-se, por hipótese de indução, que a proposição é válida para n, isto é, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ é verdadeira para $n > 1$

Terceiro passo: Prova-se que a proposição é válida para $(n+1)$; assim:

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1})$$

$$= a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - p_n a_{n+1} q_n - p_n q_{n-1}$$

$$= p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$$

$$\overset{H.I.}{=} -(-1)^{n-1} = (-1)^1 (-1)^{n-1} = (-1)^n.$$

Desse modo, o resultado (3.4) é válido para todo natural $n \geq 1$. □

Observação 3.5.1. Uma consequência imediata desse resultado é que o numerador e o denominar de um convergente são primos entre si, pois seus divisores também são divisores de 1.

Colorário 3.1. *Se o n-ésimo convergente da fração contínua simples* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ *é* $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$*, então para todo* $n \geq 1$*, vale*

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \tag{3.5}$$

Demonstração. Utilizando o teorema anterior, basta ver que

$$c_n - c_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \quad \square$$

Teorema 3.3. *Se o n-ésimo convergente de uma fração contínua simples* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ *é* $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$*, para todo* $n > 1$*, então vale*

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n-2} a_n}{q_n q_{n-2}} \tag{3.6}$$

Demonstração. Primeiro observa-se que:

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})$$

$$= a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} - p_{n-2} a_n q_{n-1} - p_{n-2} q_{n-2}$$

$$= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$$

$$= (-1)^{n-2} a_n$$

Dividindo-se isso por $q_n q_{n-2}$, obtem-se:

$$\frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-2} a_n}{q_n q_{n-2}}$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-2} a_n}{q_n q_{n-2}}$$

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n-2} a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

$\square$

Colorário 3.2. *A sequência dos convergentes de ordem ímpar* c_{2n+1} *de qualquer fração contínua é decrescente, a sequência dos convergentes de ordem par* c_{2n} *é crescente, qualquer convergente de ordem par é menor que qualquer convergente de ordem ímpar e todo convergente de ordem maior ou igual a três está comprendido entre os dois que o precedem:*

$$c_0 < c_2 < c_4 < \cdots < c_{2n} < c_{2n-1} < \cdots < c_5 < c_3 < c_1$$

$$c_2 < c_3 < c_1, \; c_2 < c_4 < c_3, \; \ldots, \; c_{2n} < c_{2n-1} < c_{2n+1}, \; c_{2n} < c_{2n+2} < c_{2n+1}$$

Demonstração. Na equação (3.5), fazendo $n = 2$, tem-se $c_2 - c_1 = \dfrac{(-1)^1}{q_2 q_1} < 0 \Rightarrow c_2 < c_1$. Fazeno $n = 3$, tem-se $c_3 - c_2 = \dfrac{(-1)^2}{q_3 q_2} > 0 \Rightarrow c_3 > c_2$.

N equação (3.6), fazendo $n = 3$, tem-se $c_3 - c_1 = \dfrac{(-1)^1 a_3}{q_3 q_1} < 0 \Rightarrow c_3 < c_1$. Desses resultados tem-se

$$c_2 < c_3 < c_1$$

Usando raciocínio análogo, fazendo $n = 3$ e $n = 4$ equação (3.5), conclui-se que $c_3 > c_2$ e $c_4 < c_3$. Fazendo $n = 4$ na equação (3.6), tem-se $c_4 > c_2$. E disso resulta que

$$c_2 < c_4 < c_3$$

Do mesmo modo chegamos a $c_4 < c_3$, $c_5 > c_4$ e $c_5 < c_3$, e daí vem

$$c_4 < c_5 < c_3$$

Portanto

$$c_0 < c_2 < c_4 < \cdots < c_{2n} < c_{2n-1} < \cdots < c_5 < c_3 < c_1$$

e isso prova que os convergentes de ordem ímpar são decrescentes, os convergentes de ordem par são crescentes, um convergente qualquer está entre os dois convergentes que o precedem, e que todo convergente de ordem par é menor que todo convergente de ordem ímpar.

□

Exemplo 3.5. Dada a fração contínua $[1; 1, 2, 1, 2, 1]$, verifique as propriedades do corolário (3.2).

Solução. Com auxílio da tabela (3.3) encontramos os convergentes rapidamente.

Tabela 3.6: Cálculo dos convergentes de $[1; 1, 2, 1, 2, 1]$

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n		**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**
p_n	1	1	2	5	7	19	26
q_n	0	1	1	3	4	11	15
c_n	não há	$c_0 = \frac{1}{1}$	$c_1 = \frac{2}{1}$	$c_2 = \frac{5}{3}$	$c_3 = \frac{7}{4}$	$c_4 = \frac{19}{11}$	$c_5 = \frac{26}{15}$

Os convergentes de ordem ímpar c_1, c_3 e c_5 decrescem até $\dfrac{26}{15}$, que é o valor da fração contínua neste caso, e os de ordem par c_0, c_2 e c_4 crescem, sendo que são menores que $\dfrac{26}{15}$:

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

3.6 Números Irracionais e Frações Contínuas

Definição 3.5. Uma *fração contínua simples infinita* é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

em que a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ tem infinitos termos.

Ao número real

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

chamamos *valor da fração contínua.*

Como foi visto, os números racionais podem ser expressos através de frações contínuas finitas, e vice-versa. Mas também é possível representar os números irracionais por meio de frações contínuas, mas neste caso, a expansão não pára, e a sequência de quocientes parciais tem infinitos termos. O exemplo que segue objetiva a esclarecer esse fato.

Exemplo 3.6. Desenvolver em frações contínuas o número $\sqrt{13}$.

Solução. Chama-se a parte inteira de $\sqrt{13}$ de a_0, observa-se que $3 < \sqrt{13} < 4$, ou seja, $a_0 = 3$. Assim pode-se escrever $\sqrt{13} = 3 + \dfrac{1}{a_1}$, e daí determina-se a_1. Assim,

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{a_1} \Rightarrow \sqrt{13} - 3 = \frac{1}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} \cdot \frac{\sqrt{13} + 3}{\sqrt{13} + 3} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{13} + 3}{4}$$

Agora, como $1 < a_1 < 2$, escreve-se $a_1 = 1 + \dfrac{1}{a_2}$, e repete-se o processo para calcular a_2.

$$\frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + \frac{1}{a_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}+3}{4} - 1 = \frac{1}{a_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{4} = \frac{1}{a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{4}{\sqrt{13}-1} \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{4}{\sqrt{13}-1} \cdot \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}+1} \Rightarrow a_2 = \frac{4(\sqrt{13}+1)}{12} \Rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{13}+1}{3}$$

Agora, como $1 < a_2 < 2$, escreve-se $a_2 = 1 + \dfrac{1}{a_3}$, e repete-se o processo para calcular a_3.

$$\frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + \frac{1}{a_3} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}+1}{3} - 1 = \frac{1}{a_3} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}-2}{3} = \frac{1}{a_3} \Rightarrow a_3 = \frac{3}{\sqrt{13}-2} \Rightarrow$$

$$a_3 = \frac{3}{\sqrt{13}-2} \cdot \frac{\sqrt{13}+2}{\sqrt{13}+2} \Rightarrow a_3 = \frac{3(\sqrt{13}+2)}{9} \Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$$

Agora, como $1 < a_3 < 2$, escreve-se $a_3 = 1 + \dfrac{1}{a_4}$, e repete-se o processo para calcular a_4

$$\frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + \frac{1}{a_4} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}+2}{3} - 1 = \frac{1}{a_4} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{3} = \frac{1}{a_4} \Rightarrow a_4 = \frac{3}{\sqrt{13}-1} \Rightarrow$$

$$a_4 = \frac{3}{\sqrt{13}-1} \cdot \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}+1} \Rightarrow a_4 = \frac{3(\sqrt{13}+1)}{12} \Rightarrow a_4 = \frac{\sqrt{13}+1}{4}.$$

Agora, como $1 < a_4 < 2$, escreve-se $a_4 = 1 + \dfrac{1}{a_5}$, e repetimos o processo para calcular a_5.

$$\frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + \frac{1}{a_5} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}+1}{4} - 1 = \frac{1}{a_5} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}-3}{4} = \frac{1}{a_5} \Rightarrow a_5 = \frac{4}{\sqrt{13}-3} \Rightarrow$$

$$a_5 = \frac{4}{\sqrt{13}-3} \cdot \frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}+3} \Rightarrow a_5 = \frac{4(\sqrt{13}+3)}{4} \Rightarrow a_5 = \sqrt{13}+3.$$

Agora, como $6 < a_5 < 7$, escreve-se $a_5 = 6 + \dfrac{1}{a_6}$, e repete-se o processo, agora para calcular a_6.

$$\sqrt{13}+3 = 6 + \frac{1}{a_6} \Rightarrow \sqrt{13}-3 = \frac{1}{a_6} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} \Rightarrow$$

$$a_6 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} \cdot \frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}+3} \Rightarrow a_6 = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \Rightarrow a_6 = \frac{\sqrt{13}+3}{4}.$$

Aqui, observamos que $a_6 = a_1$, e isso significa, por consequência, que $a_7 = a_2$, $a_8 = a_3$, enfim, que $a_{n+5} = a_n$. Dessa forma, pode-se concluir que

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}$$

Ou seja:

$$\sqrt{13} = [\ 3; 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, ...]$$

.

O exemplo 4, apesar de apresentar um processo geral, pode parecer desanimador, visto haver repetição de quocientes parciais apenas depois de cinco iterações. Mas nem sempre o trabalho é tão grande quando o exemplo indica, senão vejamos:

Exemplo 3.7. Desenvolver $\sqrt{5}$ em frações contínuas.

Solução. Chama-se a parte inteira de $\sqrt{5}$ de a_0, observa-se que $2 < \sqrt{5} < 3$, ou seja, $a_0 = 2$. Assim pode-se escrever $\sqrt{5} = 2 + \dfrac{1}{a_1}$, e daí determina-se a_1. É o que segue:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{a_1} \Rightarrow \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{5} + 2$$

Agora, como $4 < a_1 < 5$, escreve-se $a_1 = 4 + \dfrac{1}{a_2}$, e repete-se o processo para calcular a_2.

$$\sqrt{5} + 2 = 4 + \frac{1}{a_2} \Rightarrow \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{a_1} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} \Rightarrow a_2 = \sqrt{5} + 2.$$

Como ocorreu com $\sqrt{13}$, aqui também observa-se que $a_2 = a_1$, e isso significa, por consequência, que $a_3 = a_2$, $a_4 = a_3$, enfim, que $a_{n+1} = a_n$.

Dessa forma, conclui-se que

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

ou seja,

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, \cdots]$$

Como se pode notar, é natural se perguntar se os números irracionais também podem ser desenvolvidos em frações contínuas, a resposta é sim. A construção segue da seguinte maneira:

Se α é um número irracional, seja a_0 sua parte inteira, b_0 sua parte decimal, isto é, compreendida entre zero e um. Então tem-se $\alpha = a_0 + b_0$. Como $b_0 < 1$, deduz-se que $\dfrac{1}{b_0} > 1$. Agora, faz-se $\dfrac{1}{b_0} = \alpha_1$, conclui-se que $b_0 = \dfrac{1}{\alpha_1}$. Desse modo,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Porém α_1 não é inteiro, ele próprio tem uma parte inteira e outra decimal, o que se permite escrever: $\alpha_1 = a_1 + b_1$. Como $b_1 < 1$, deduz-se que $\dfrac{1}{b_1} > 1$. Agora faz-se $\dfrac{1}{b_1} = \alpha_2$, de onde vem que $b_1 = \dfrac{1}{\alpha_2}$. Assim, pode-se escrever $\alpha_1 = a_1 + \dfrac{1}{\alpha_2}$. Desse modo:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}.$$

E assim pode-se continuar indefinidamente, pois α_2 é irracional também e, do mesmo modo, o será α_3, α_4, $\ldots \alpha_n$. O que nos permite concluir que

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

onde a_n é um número inteiro e $\alpha_{n+1} > 1$. Assim, tem-se:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}}. \tag{3.7}$$

ou seja

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$$

Os *termos*, ou *quocientes parciais* $a_1, a_2, \ldots a_n$ são números naturais e a_0 pode ser um inteiro qualquer. O *quociente completo* correspondente a a_n é α_n. Como os quocientes completos $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1}$ são irracionais, o processo nunca termina, é infinito.

Verifica-se, de acordo com teorema (3.1), que a expressão (3.7) nos permite escrever os convergentes $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ do número irracional α do seguinte modo:

$c_0 = a_0 = \dfrac{a_0}{1}.$

$c_1 = [a_0; a_1] = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}.$

$c_2 = [a_0; a_1, a_2] = \dfrac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \dfrac{a_2(a_0 a_1 + a_0) + p_0}{a_2(q_1) + q_0} = \dfrac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}.$

$c_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = \dfrac{a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_2}$

$= \dfrac{a_3(a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2) + (a_0 a_1 + a_0 + 1)}{a_3(a_1 a_2) + a_1 + a_2} = \dfrac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1}$

$$\vdots$$

Logo para $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$, temos

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} \tag{3.8}$$

Esta relação expressa qualquer número real α de forma exata. Assim, o modo como se obtém as frações reduzidas é o mesmo tanto para uma fração contínua finita, quanto para uma fração contínua infinita.

Com base na definição (3.5) e no exposto anteriormente, dado um número irracional α sua fração contínua pode ser escrita assim:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Dessa forma, todo número irracional é uma fração contínua de infinitos termos, e toda fração contínua infinita, por não poder representar um número racional, é um número irracional.

Exemplo 3.8. Encontrar os cinco primeiros convergentes de $\sqrt{2}$.

Solução. Primeiro expressamos $\sqrt{2}$ como fração contínua:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

Assim:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}} = \; = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \Rightarrow \sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$$

Agora encontramos os convergentes, conforme vimos na tabela (3.3)

a_n		1	2	2	2	2	...
p_n	1	1	3	7	17	41	...
q_n	0	1	2	5	12	29	...

Os convergentes procurados são: $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, e $\frac{41}{29}$.

No próximo exemplo é dada, com o auxílio do Axioma de Cantor (7.2), que se encontra no apêndice, uma forma de se compreender a relação existente entre esses convergentes e $\sqrt{2}$.

Exemplo 3.9. A igualdade: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$ pode ser considerada?

Considere, para tanto, no eixo numérico os seguintes segmentos

$$\left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{7}{5}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{7}{5}, \frac{17}{12}\right], \left[\frac{41}{29}, \frac{17}{12}\right], \dots, \left[\frac{a_{2k}p_{2k-1} + p_{2k-2}}{a_{2k}q_{2k-1} + q_{2k-2}}, \frac{a_{2k+1}p_{2k} + p_{2k-1}}{a_{2k+1}q_{2k} + q_{2k-1}}\right]$$

em que a_n são os termos da fração contínua $[1; 2, 2, 2, \dots,]$ e os extremos no último intervalo representado são seus convergentes de ordem par e ordem ímpar respectivamente. De acordo com (3.2), esses intervalos tem extremos que obedecem as seguintes desigualdades

$$\begin{gathered}
1 \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2} \\
\frac{7}{5} \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2} \\
\frac{7}{5} \leq \sqrt{2} \leq \frac{17}{12} \\
\frac{41}{29} \leq \sqrt{2} \leq \frac{17}{12} \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
\frac{a_{2k}p_{2k-1} + p_{2k-2}}{a_{2k}q_{2k-1} + q_{2k-2}} \leq \sqrt{2} \leq \frac{a_{2k+1}p_{2k} + p_{2k-1}}{a_{2k+1}q_{2k} + q_{2k-1}} \\
\dots \quad \dots \quad \dots
\end{gathered}$$

Como visto, dado um número irracional qualquer, sempre é possível construir, com o auxílio do corolário (3.2), uma sequência de intervalos encaixados que satisfaz o princípio dos intervalos encaixados que, conforme o axioma (7.2), ver seção (7.4) do apêndice. Assim estabelece-se a relação biunívoca entre uma fração contínua infinita e um número irracional.

Mas, para não restar dúvida de que aquele ponto determinado pelos intervalos encaixados construídos a partir dos convergentes é de fato o número irracional que gera os infinitos termos de uma fração contínua infinita, segue uma prova com base na teoria dos limites.

Proposição 3.1. *Se α é um número irracional e $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ é a sequência de seus convergentes, então:*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$$

Demonstração. Ora,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| = \left|\frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| = 0$$

□

3.6.1 Frações Contínuas Periódicas

Como visto $\sqrt{13} = [\ 3; 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, ...]$ e $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, \cdots]$, são frações contínuas que apresentam, como ocorre nas dízimas periódicas, um período, e por causa disso, elas são chamadas de *Frações Contínuas Periódicas.*

Definição 3.6. Chama-se fração contínua periódica a toda fração contínua infinita $\alpha = [a_0; a_1, a_3, \dots]$ em que os inteiros a_i se repetem periodicamente a partir de um certo índice. Isto é, existem os inteiros $k \geq 0$ e um $t > 1$ tais que

$$a_{n+t} = a_n$$

e neste caso se escreve:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+t-1}}]. \tag{3.9}$$

O menor natural t que satisfaz (3.9) se chama período. Uma fração contínua em que $k = t = 0$ se diz simplesmente periódica. Neste caso, $\alpha = [\overline{a_0; a_1, \dots, a_i, \dots, a_{t-1}}]$.

De acordo com essa nomenclatura dessa, temos:

$\sqrt{13} = [\ 3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$;

$\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$;

$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$;

$\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2} = [1; 7, \overline{2, 6}]$.

As frações contínuas periódicas são divididas em *simples*, quando o período vem logo após o primeiro termo, e difere deste, é o caso de $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$; *mistas*, quando entre o primeiro termo e o período tem um antiperíodo, caso de $\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2} = [1; 7, \overline{2, 6}]$;

e *puras*, quando o período já começa com o primeiro termo, é o caso de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;1,1,...] = [\overline{1}]$.

É claro que as frações contínuas infinitas não são todas periódicas, um exemplo é π que, entre outras maneiras, pode ser expresso em frações contínuas através do procedimente geral:

Passo 1: Faz-se $\alpha_0 = \pi$ e destaca-se a parte inteira de $\pi = 3,14159265359$, isto é, $a_0 = 3$;

Passo 2: Efetua-se a diferença entre α_0 e a_0, e determina-se a parte decimal de α_0, isto é: $\pi - a_0 = 0,14159265359$;

Passo 3: Inverte-se a parte decimal, isto é: $\dfrac{1}{\pi - a_0} = 7.06251330593$ e obtem-se um número $\alpha_1 = 7.0625133059$, maior que um;

Passo 4: Com α_1 executa-se os passos 1, 2, e 3 e determina-se α_2. Depois, com α_2 executa-se os passos 1, 2, e 3 e determina-se α_3. E assim por diante...

Esse o processo pode ser organizado numa tabela:

α_n	Parte inteira	Parte decimal	α_{n+1}
$\alpha_0 = \pi$	3	$\pi - 3 = 0,14159265359$	$\alpha_1 = 7,06251330593$
$\alpha_1 = 7,06251330593$	7	$\alpha_1 - 7 = 0,06251330593$	$\alpha_2 = 15,9965944067$
$\alpha_2 = 15,9965944067$	15	$\alpha_2 - 15 = 0,99659440668$	$\alpha_3 = 1,00341723101$
$\alpha_3 = 1,00341723101$	1	$\alpha_3 - 1 = 0,00341723101$	$\alpha_4 = 292,634590875$
...	...	...	...

E assim, $\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$. No proxima capítulo ficará claro que π é uma fração contínua não periódica.

4 Aplicações de Frações Contínuas

Segundo Cunha "(...) frações contínuas constituem um exemplo interessante de procedimento que é finito quando operado sobre números racionais, e infinito, quando o número dado é irracional.(...)" (2007, p.3 citado por MACHADO, 2009, p. 1)

É possível usar frações contínuas tanto em aplicações teóricas, na construção de conceitos esclarecedores, quanto em aplicações de ordem prática. Exporemos abaixo algumas dessas aplicações que consideramos relevantes para qualquer estudante do Ensino Básico.

4.1 Classificação das Irracionalidades

Entre as muitas aplicações de frações contínuas, há a que permite *classificar as irracionalidades*[1] pois esse vasto conjunto não é esmiuçado no ensino básico, como ocorre com os números naturais, os inteiros e os racionais, o que pode levar a crer que aqieles não sejam tão importantes. Comecemos recordanto que um número se diz algébrico quando é raiz de uma equação algébrica da forma

$$a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{4.1}$$

onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são número inteiros.

Se um número irracional é solução de uma equação algébrica como essa, ele é dito *irracional algébrico.*

Entre os irracionais algébricos, aqueles que são soluções de uma equação do segundo grau, isto é, que resolvem a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0, \tag{4.2}$$

são chamados de *irracionais quadráticos.*

[1]Essa expressão é usada por Beskin [3] para se referir às diferenças marcantes que existem entre os números irracionais. Assim, há os irracionais algébricos e os irracionais transcentendes. Entre os irracionais algébricos há os quadráticos e os não quadráticos. A expansão dos irracionais quadráticos, e apenas a deles, gera frações contínuas periódicas.

Se um número irracional é solução dessa equação, ele não pode ser solução de nenhuma equação algébrica de grau inferior a essa (Greco, 2012, p.41). Dessa forma, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são soluções da equação $x^2 - 2 = 0$, mas não existem números inteiros a e b tais que $\sqrt{2}$ seja solução da equação $ax + b = 0$.

Existe uma correspondência entre os irracionais quadráticos e as frações contínuas periódicas, por isso vamos caracterizar esses números. Como se sabe, a equação (4.2) permite escrever $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que é um número irracional se $b^2 - 4ac > 0$ e não é um quadrado perfeito. Na verdade, essas condições satisfeitas nos permitem escrever $x = \dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Se fizermos $A = \dfrac{-b}{2a}$, e $B\sqrt{C} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, teremos então $x = A \pm B\sqrt{C}$, onde A e B são números racionais. Dessa maneira, temos a seguinte definição:

Definição 4.1. *Dados A e B números racionais e C, um número natural que não é um quadrado perfeito, todo número da forma $A \pm B\sqrt{C}$, com $B \neq 0$ é chamado de irracional quadrático.*

O conceito de número irracional quadrático é importante porque, entre outros motivos, está conectado aos dois teoremas seguintes que procuram caracterizar uma parte dos números irracionais via frações contínuas, o primeiro é devido a Euler (Greco, 2012).

Teorema 4.1. *O valor de qualquer fração contínua periódica é uma irracionalidade quadrática.*

Uma demonstração desse teorema é dada por Beskin [3]. Nos limitaremos a dois exemplos que mostram como, a partir de uma fração contínua periódica, podemos encontrar seu valor, isto é, o número irracional por ela representado.

Exemplo 4.1. Que número irracional está representado pela fração contínua periódica simples $[2; 4, 4, 4, ...]$?

Solução. Primeiro façamos

$$x = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}} \Rightarrow x - 2 = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}} \quad \text{(I).}$$

Agora, invertamos esse resultado para obtermos:

$$\frac{1}{x-2} = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}} \quad \text{(II).}$$

De (I) e (II), vem:

$$\frac{1}{x-2} = 4 + (x-2) \Rightarrow 1 = 4(x-2) + (x-2)^2 \Rightarrow$$

$$1 = 4x - 8 + x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

Como $[2; 4, 4, 4, ...]$ é um número positivo, conclui-se que $x = \sqrt{5}$.

Exemplo 4.2. Que número irracional está representado pela fração contínua periódica mista $[1; 3, 2, 2, ...]$?

Solução. Primeiro façamos

$$y = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \Rightarrow y - 1 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Invertendo-se esse resultado obtermos:

$$\frac{1}{y-1} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}} \Rightarrow \frac{1}{y-1} - 3 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}} \Rightarrow \frac{-3y+4}{y-1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}} \quad (I).$$

Agora invertamos o resultado (I) para obtermos:

$$\frac{y-1}{-3y+4} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}} \quad (II)$$

De (I) e (II), vem:

$$\frac{y-1}{-3y+4} = 2 + \frac{-3y+4}{y-1} \Rightarrow \frac{y-1}{-3y+4} = \frac{-y+2}{y-1} \Rightarrow$$

$$(y-1)^2 = (-3y+4)(-y+2) \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 3y^2 - 6y - 4y + 8 \Rightarrow$$

$$2y^2 - 8y + 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Como a parte inteira de $[1; 3, 2, 2, ...]$ é um, conclui-se que $y = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$. □

O teorema (4.1) garante que toda fração contínua periódica é um número irracional quadrático. Mas será que todo número irracional quadrático é uma fração contínua periódica? A resposta é sim, e é garantida pelo seguinte teorema, devido a Lagrange (Greco, 2012).

Teorema 4.2. *Qualquer número irracional quadrático se exprime através de uma fração contínua periódica.*

Segundo Beskin [3]:

> "Lagrange demonstrou o seu teorema (4.2) de uma forma extremamente complexa. Muitos matemáticos, mantendo-se fiel à ideia de Lagrange, tentaram simplificar certas partes da demonstração. Cem anos mais tarde, o matemático francês Charves, baseado numa ideia diferente apresenta uma demonstração mais simples."

Após esse comentário, o próprio Beskin apresenta essa demonstração em [3].

Esses dois teoremas, o de Euler e o de Lagrange, podem ser unificados no teorema seguinte.

Teorema 4.3 (Euler-Lagrange)**.** *O número é uma fração contínua periódica se, e somente se, é um irracional quadrático.*

Em sua tese de doutorado [9], Greco apresenta uma demonstração relativamente fácil desse teorema, na qual faz preliminarmente uma caracterização mais detalhada dos números irracionais quadráticos. Dessa maneira, esse teorema garante que, no país dos números irracionais, há uma cidade habitada por esses números que, em frações contínuas, apresentam um desenvolvimento periódico. E o que isso significa? Bem, saber disso nos impede de esperar que, por exemplo $\sqrt[3]{2}$, tenha um período, visto que não existe uma equação quadrática, conforme (4.2) que o tenha como raíz. Do mesmo modo, acontece com π, e, a base dos logaritmos naturais, entre outros.

Um número irracional que não satisfaz a Equação (4.1) é dito *transcendente*. Vale lembrar também que a transcendência de π, e de $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, foi provada por Euler, usando-se frações contínuas como ferramenta de caracterização dos números irracionais.

Os números irracionais não quadráticos, por não apresentarem período, geram as *frações contínuas infinitas não periódicas*. Essas, por sua vez estão divididas em *frações contínuas não periódicas regulares*, aquelas cuja sucessão dos quocientes parciais apresenta um padrão. Assim, é possível estabelecer uma lei posicional que permite determinar os seus termos. Abaixo temos dois exemplos desses números dados por Euler.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}} = [\ 2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, ...]$$

Nessa fração contínua, após o primeiro 1 (um), aparece a sequência dos números pares não nulos separados regularmente por dois $1's$.

O desenvolvimento em frações contínuas da seguinte cotangente hiperbólica de é devido a Euler

$$cotgh(1) = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}} = [1; 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...]$$

Neste caso, também não há período, mas a sequência dos números ímpares constitui os quocientes parciais.

Podemos, pois, denominar de *irracionais não quadráticos regulares*, aos número que correspondem a essas frações contínuas.

Também se deve a Euler expansão para π

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

o que nos leva a crer que π não pertence a mesma categoria dos números acima, pois seu desenvolvimento gera uma *fração contínua não periódica não regular*. Dizemos que π é um *número irracional não periódico não regular*.

Esse exemplos mostram que os números irracionais apresentam riquíssimas propriedades em frações contínuas, e essas permitem classificá-los em conjuntos munidos de propriedades próprias. Ou seja, as frações contínuas constituem uma excelente ferramenta para classificar as irracionalidades.

4.2 Aproximações

Não são poucas as aplicações de frações contínuas em situações práticas, e uma parte delas tem a ver com aproximações de um número real. Como vimos, Pietro Cataldi, expressou a raiz quadrada de 18, em notação moderna, desse modo:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}}.$$

Ele truncava essa expressão para obter boas aproximações para $\sqrt{18}$, essas eram tão mais precisas quanto maior fosse a ordem do termo da fração contínua onde se fazia truncamento.

Assim, se para aproximar $\sqrt{18}$ truncarmos sua fração contínua no termo de ordem zero, teremos

$$\sqrt{18} = 4$$

Se truncarmos no termo de ordem 1, teremos

$$\sqrt{18} \approx 4 + \frac{2}{8} = 4,25.$$

Se truncarmos no termo de ordem 2, teremos

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8}} = 4 + \cfrac{2}{\cfrac{33}{4}} = 4 + \frac{8}{33} = \frac{140}{} \approx 4,242424$$

Se truncarmos no termo de ordem 3,

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8}}} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{8}{33}} = 4 + \frac{33}{136} = \frac{577}{136} \approx 4,242647$$

Observemos que

$$4^2 = 16$$

$$4,25^2 = 18,065$$

$$4,242424^2 \approx 17,998161$$

$$4,242647059^2 \approx 18,000054$$

Isso sugere que frações contínuas oferecem boas aproximações para os números reais. Mas por que isso acontece? Frações reduzidas fornecerem excelentes aproximações. Na verdade, dado um número real, os convergentes de sua fração contínua são as melhores aproximações que ele pode ter.

4.2.1 As Mais Vantajosas Aproximações

Entre as muitas aproximações de um número real, existem aquelas que são chamadas vantajosas. Para compreendermos esse conceito, veremos algumas definições.

No universo dos números reais $\mathbb{R}$, consideremos o conjunto M_q de todas as frações racionais, tal que, seus denominadores não são maiores que q.

Aproximação racional de um número real α é o número $r \in M_q$ que está mais próximo de α.

Dessa maneira, podemos escrever

$$\alpha \approx r.$$

Dizer que r é uma *aproximação vantajosa* de α significa que é impossível aumentar a exatidão de r sem aumentar seu denominador.

Por exemplo, para $\alpha = \sqrt{2}$, temos $M_5 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5} \cdots\right\}$, e $r = \frac{7}{5}$. Ou seja, de todas as frações com denominadores não maiores que 5, $\frac{7}{5}$ é o número mais próximo de $\sqrt{2}$. Vejamos que as frações irredutíves de denominador 9 que são aproximações de $\sqrt{2}$, isto é, $\left\{\frac{9}{9}, \frac{10}{9}, \frac{11}{9}, \frac{12}{9}, \frac{13}{9}\right\}$ não são vantajosas pois frações com denominadores menores que 9 oferecem resultados mais exatos. Isto significa que, entre a melhor aproximação de denominador 9, e a melhor aproximação de denominar não superior a 5, esta última se encontra mais próxima de $\sqrt{2}$, portanto, é mais vantajosa. Tudo isso nos leva a seguinte definição:

Definição 4.2. A fração racional irredutível $\frac{a}{b}$ é dita **melhor aproximação racional** do número real x se

$$|bx - a| < |qx - p| \tag{4.3}$$

é verdadeira para qualquer número racional $\frac{p}{q}$, com $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$ e $0 < q \leq b$.

Agora vamos mostrar que a desigualdade (4.3) implica

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right| \tag{4.4}$$

De fato, primeiro temos

$$q < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{q} \quad \text{(I)}.$$

Multiplicando-se membro a membro as desigualdades (I) e (4.3), obtemos:

$$\frac{1}{b}|bx - a| < \frac{1}{q}|qx - p| \Rightarrow |\frac{1}{b}(bx - a)| < |\frac{1}{q}(qx - p)| \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|.$$

Como $\left|\pi - \frac{179}{57}\right| < \left|\pi - \frac{22}{7}\right|$, porém $|57\pi - 179| > |7\pi - 22|$. Logo (4.4) não implica (4.3).

Bracciali faz em [2] uma demonstração do seguinte teorema.

Teorema 4.4. *Seja x um número real. Qualquer melhor aproximação racional de x, dada pela definição 4.2, é um convergente da expansão de x em fração contínua simples.*

Isso significa que podemos estar seguros de que as frações reduzidas são, não apenas boas aproximações de um número real, mas a melhor, isto é, a mais vantajosa aproximação.

O erro absoluto que se comete ao se aproximar um número real α por um convergente de sua fração contínua $\dfrac{p_n}{q_n}$ é dado por

$$e = \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

De fato, a Equação (3.8), diz que

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

Se calcularmos o erro absoluto entre α e seu convergente $\dfrac{p_n}{q_n}$, temos

$$e = \left|\frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \Rightarrow$$

$$e = \left|\frac{q_n(\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}) - p_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| \Rightarrow$$

$$e = \left|\frac{q_n\alpha_{n+1}p_n + q_np_{n-1} - p_n\alpha_{n+1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| \Rightarrow$$

$$e = \left|\frac{q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| = \left|\frac{-(p_nq_{n-1} - q_np_{n-1})}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| \Rightarrow$$

Usando a Equação (3.4), tem-se $e = \left|\dfrac{-(-1)^{n-1}}{q_nq_{n+1}}\right|$, ou seja,

$$e = \frac{1}{q_nq_{n+1}}. \tag{4.5}$$

Como $q_{n+1} > q_n \Rightarrow q_nq_{n+1} > q_n^2 \Rightarrow \dfrac{1}{q_nq_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n^2}$, daí e da Equação (4.5), deduz-se a seguinte estimativa para o erro absoluto

$$e < \frac{1}{q_n^2}. \tag{4.6}$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.3. Calcule $\sqrt{5}$ com um erro menor que um milésimo.

Solução. Como vimos, $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$. Assim, basta construirmos a tabela dos convergentes até atingirmos um denominador cujo quadrado seja maior que 1000. É o que segue:

a_n		2	4	4	4	...
p_n	1	2	9	38	161	...
q_n	0	1	4	17	72	...
$\frac{p_n}{q_n}$		2	$\frac{9}{4}$	$\frac{38}{17}$	$\frac{161}{72}$	...

$$\sqrt{5} \approx \frac{161}{72} = 2,236111... \text{ com erro absoluto } e < \frac{1}{72^2} = 0,00019.$$

Observamos que de acordo com (4.6), o erro $e < \frac{1}{72^2} = 0,00019$ mostra que a aproximação $\sqrt{5} \approxeq 2,236111...$ está correta até a terceira casa decimal. Portanto, de acordo com o problema

$$\sqrt{5} = 2,236.$$

Proposição 4.1. *As reduzidas constituem as melhores aproximações de uma fração contínua.*

Concluímos essa parte observando que a poroposição (4.1), encontrada e provada em Beskin [3], tida como **Propriedade Fundamental das Reduzidas.**

Essa propriedade nos permite fazer aplicações dessa teoria em muitas situações práticas, como passamos a ver agora. Em [3] Beskin apresenta um critério que permite calcular o quanto uma aproximação é vantajosa. Esse critério consiste em determinar o **Coeficiente de Vantagem** de uma aproximação.

4.2.2 Cálculo de Raízes Quadradas

Como vimos no início deste capítulo, uma das aplicações de frações contínuas consiste em fazer aproximações. No cálculo da raíz quadrada de um número podemos proceder da seguinte maneira: 1) Desenvolvemos o número em frações contínuas; 2) Encontramos as frações reduzidas; 3) Aplicamos a precisão desejada.

Exemplo 4.4. Calcular $\sqrt{13}$ com três casas decimais exatas.

Solução. Como vimos $\sqrt{13} = [\ 3; 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, ...]$, dessa maneira, os convergentes são:

a_n		3	1	1	1	1	6	1	...
p_n	1	3	4	7	11	18	119	137	...
$_n$	0	1	1	2	3	5	33	38	...

Assim, se tomarmos $\frac{137}{38} = 3,6055$ o erro será menor que $\frac{1}{38^2} = \frac{1}{1444}$ e garantimos três casas decimais exatas.

4.2.3 Exponenciais e Logaritmos

Podemos usar frações contínuas para calcular logaritmos e assim, resolvermos equações exponencias de bases diferentes:

Exemplo 4.5. Resolva a equação $2^x = 3$ usando frações contínuas e com um erro inferior a 0,01.

Solução. Como

$$2^1 < 3 < 2^2 \Rightarrow 1 < x < 2,$$

fazendo

$$x = 1 + \frac{1}{x_1},$$

temos

$$2^{1+\frac{1}{x_1}} = 3 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x_1}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = 2.$$

Agora, como

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 < 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 < x_1 < 2$$

fazendo

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2},$$

vem

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x_2}} = 2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x_2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x_2} = \frac{3}{2}.$$

Assim,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 < \frac{3}{2} < \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow 1 < x_2 < 2$$

e

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

logo

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x_3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x_3}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^{x_3} = \frac{4}{3}.$$

Temos também

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 < \frac{4}{3} < \left(\frac{9}{8}\right)^3 \Rightarrow 2 < x_3 < 3$$

e fazendo

$$x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$$

vem

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{x_4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x_4}} = \frac{256}{243} \Rightarrow \left(\frac{256}{243}\right)^{x_4} = \frac{9}{8}.$$

Como

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2 < \frac{9}{8} < \left(\frac{256}{243}\right)^3 \Rightarrow 2 < x_4 < 3$$

fazendo

$$x_4 = 2 + \frac{1}{x_5}$$

temos,

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{2+\frac{1}{x_4}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \left(\frac{256}{243}\right)^{\frac{1}{x_5}} = \frac{531441}{524288} \Rightarrow \left(\frac{531441}{524288}\right)^{x_5} = \frac{256}{243}.$$

Sucessivamente, temos $x = [1; 1, 1, 1, 2, 2, ...]$

Calculando as reduzidas:

a_n		1	1	1	2	2	...
p_n	1	1	2	3	8	19	...
q_n	0	1	1	2	5	12	...

A quinta reduzida é $\frac{19}{12} = 1,5833$. Nesse valor o erro cometido é menor que $\frac{1}{12^2}(< 0,01)$, e isso garante que duas casas decimais estão corretas.

4.3 Equações Diofantinas Lineares de Duas Variáveis

Uma equação diofantina é uma equação algébrica em que as variáveis são números inteiros. São exemplos de equações diofantinas:

- $2x + 3y = 16$
- $x + 3y - 5z = 27$
- $x^2 - 3y^2 = 1$

Frações contínuas podem ser usadas para resolver equações diofantinas de vários tipos, entre elas as ternas pitagóricas, a equação de Pell, etc. Mostraremos agora como resolver equações diofantinas do tipo 1.

Definição 4.3. Chama-se *Equação Diofantina Linear nas Variáveis Inteiras x e y* a toda expressão da forma

$$ax + by = c \tag{4.7}$$

na qual a, b e c são números inteiros diferentes de zero.

É sabido que para uma equação desse tipo admitir solução, é necessário que $MDC(a, b)$ divida c.

De fato, desenvolvendo $\frac{a}{b}$ em fração contínua, seja $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ a penúltima reduzida. Subtraindo esta da última, $\frac{p_n}{q_n}$, temos:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} =$$

$$\frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}}.$$

Mas, vimos na equação (3.4) que $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$, ou seja $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$. Como $p_n = a$ e $q_n = b$, temos

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = \pm 1$$

Multiplicando por $\pm c$, vem

$$a q_{n-1}(\pm c) - b p_{n-1}(\pm c) = c$$

daí,

$$a(\pm q_{n-1}c) - b(\pm p_{n-1}c) = c \tag{4.8}$$

Comparando com a equação (4.7), concluímos que

$$x = \pm q_{n-1}c \ \text{ e } \ y = \pm p_{n-1}c$$

é uma solução particular de (4.7). Para todas as soluções inteiras, temos

$$x = \pm q_{n-1}c - bt \ \text{ e } \ y = \pm p_{n-1}c + at \tag{4.9}$$

onde t é um número inteiro qualquer. Com efeito, substituindo (4.9) na equação (4.7), temos:

$$a(\pm q_{n-1}c - bt) + b(\pm p_{n-1}c + at) = c \Rightarrow$$

$$a(\pm q_{n-1}c) - abt + b(\pm p_{n-1}c) + bat = c \Rightarrow$$

$$a(\pm q_{n-1}c) + b(\pm p_{n-1}c) = c.$$

Vejamos, num exemplo, como fuciona o processo na prática.

Exemplo 4.6. Encontre as soluções da equação diofantina $2x + 5y = 9$

Solução. Desenvolve-se $\frac{2}{5}$ em fração contínua

$$\frac{2}{5} = [0; 2, 2]$$

Forma-se as reduzidas:

a_n		0	2	2
p_n	1	0	1	2
q_n	0	1	2	5

Vemos agora que

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{2 \cdot 5}$$

logo

$$2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1$$

Multiplicando ambos os membros por -9, temos

$$2(-9 \cdot 2) + 5(9 \cdot 1) = 9$$

ou seja

$$x = -18 \ \text{ e } \ y = 9$$

Conclui-se que todas as soluções são da forma:

$$x = -18 - 5t \ \text{ e } \ y = 9 + 2t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4.7. Encontre a solução geral da equação diofantina $203x - 117y = 61$.

Solução. Desenvolve-se $\dfrac{203}{117}$ em fração contínua:

$$\frac{203}{117} = [1; 1, 2, 1, 3, 2, 3]$$

Forma-se as reduzidas

a_n		1	1	2	1	3	2	3
p_n	1	1	2	5	7	26	59	203
q_n	0	1	1	3	4	15	34	117

Tabela 4.1: Reduzidas de $\dfrac{203}{117}$

$$\frac{203}{117} - \frac{59}{34} = \frac{203 \cdot 34 - 117 \cdot 59}{117 \cdot 59}$$

logo

$$203 \cdot 34 - 117 \cdot 59 = -1$$

Multiplicando ambos os membros por -61, temos

$$203(-61 \cdot 34) + 117(61 \cdot 59) = 61$$

isto é,

$$x = -2074 \ \text{ e } \ y = 3599$$

Portando, a solução geral da equação é dada por

$$x = -2054 - 117t \ \text{ e } \ y = 3599 + 203t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

4.4 Geometria

Vejamos agora um exemplo de aplicação em Geometria resolvido à maneira dos antigos geômetras, com uso de régua e compasso.

Exemplo 4.8. Usar frações contínuas para calcular o valor do ângulo α na figura abaixo.

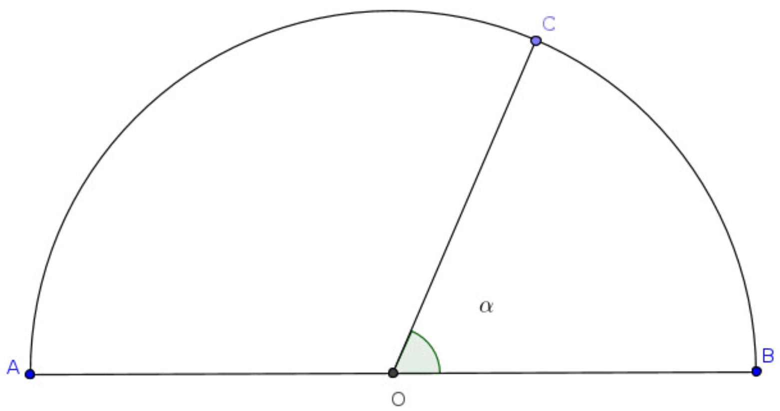

Figura 4.1: Ângulo central α a ser calculado

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Solução. A primeira parte do trabalho consiste em expressar a razão $\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{AB}}$ em frações contínuas.

Para isso, notemos que, como $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AB}$, a parte inteira de $\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{AB}}$, é zero. Assim,

$$\frac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{AB}} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}}$$

Agora, para determinar a parte inteira de $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}$, com um compasso com abertura igual a BC, centrado em C, marcamos o ponto D, de modo que $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

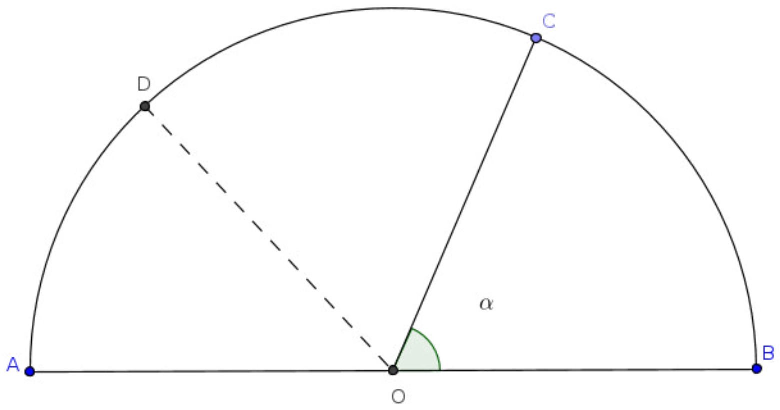

Figura 4.2: α cabe 2 vezes em $\overset{\frown}{BA}$

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Como $\overset{\frown}{DA} < \overset{\frown}{CD}$, concluímos que $\overset{\frown}{BC}$ cabe duas vezes em $\overset{\frown}{AB}$. Temos, então

$$\frac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{AB}} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\overset{\frown}{DA}}{\overset{\frown}{BC}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{DA}}}}$$

Agora, para determinar a parte inteira de $\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{DA}}$, com um compasso com abertura igual a DA, centrado em C, marcamos o ponto E, de modo que $\overset{\frown}{CE} \equiv \overset{\frown}{DA}$.

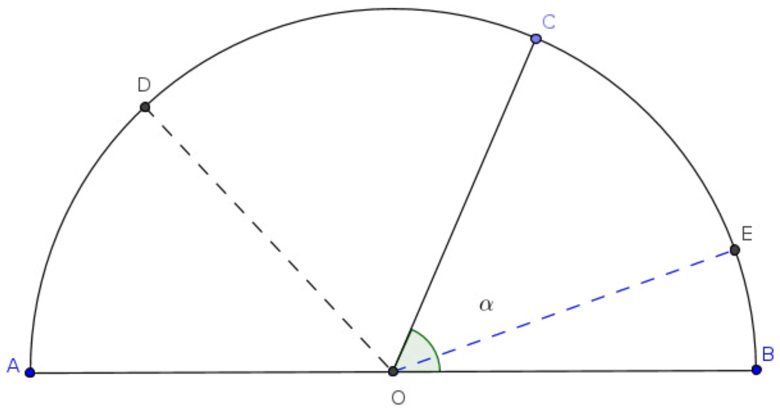

Figura 4.3: $\overset{\frown}{DA}$ cabe 1 vez em $\overset{\frown}{CB}$

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Como $\overset{\frown}{\mathrm{BE}} < \overset{\frown}{\mathrm{DA}}$, concluímos que $\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$ cabe uma vez em $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$. Temos, então

$$\frac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{DA}}}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{EB}}}{\overset{\frown}{\mathrm{DA}}}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{DA}}}{\overset{\frown}{\mathrm{EB}}}}}}$$

Agora, para determinar a parte inteira de $\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{DA}}}{\overset{\frown}{\mathrm{EB}}}$, com um compasso com abertura igual a BE centrado em D, marcamos o ponto F; com a mesma abertura, centrado em F marcamos o pondo G, de modo que $\overset{\frown}{\mathrm{DF}} \equiv \overset{\frown}{\mathrm{FG}} \equiv \overset{\frown}{\mathrm{BE}}$.

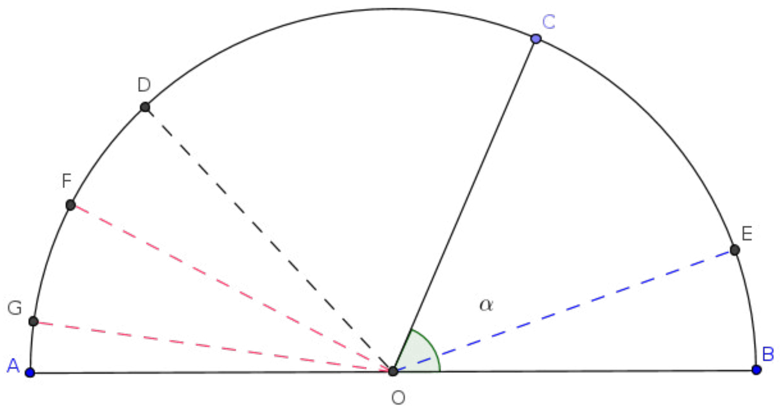

Figura 4.4: $\overset{\frown}{\mathrm{EB}}$ cabe 2 vez em $\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Como $\overset{\frown}{\mathrm{GA}} < \overset{\frown}{\mathrm{BE}}$, concluímos que $\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$ cabe duas vezes em $\overset{\frown}{\mathrm{DA}}$. Temos, então

$$\frac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{DA}}}{\overset{\frown}{\mathrm{EB}}}}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{GA}}}{\overset{\frown}{\mathrm{BE}}}}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{BE}}}{\overset{\frown}{\mathrm{GA}}}}}}}$$

Agora, para determinar a parte inteira de $\dfrac{\widehat{\mathrm{BE}}}{\widehat{\mathrm{GA}}}$, com um compasso com abertura igual a GA, centrado em E, marcamos o ponto H; com a mesma abertura, centrado em H marcamos o pondo I, de modo que $\widehat{\mathrm{EH}} \equiv \widehat{\mathrm{HI}} \equiv \widehat{\mathrm{GA}}$.

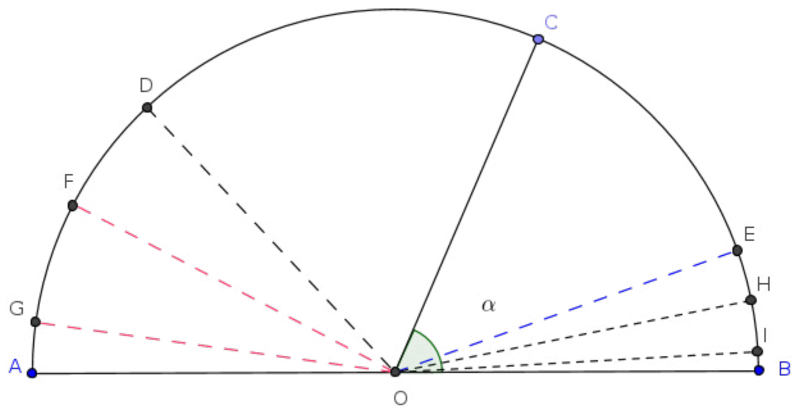

Figura 4.5: $\widehat{\mathrm{GA}}$ cabe 2 vez em $\widehat{\mathrm{EB}}$

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Como $\widehat{\mathrm{IB}} < \widehat{\mathrm{GA}}$, concluímos que $\widehat{\mathrm{GA}}$ cabe duas vezes em $\widehat{\mathrm{EB}}$. Temos, então

$$\frac{\widehat{\mathrm{BC}}}{\widehat{\mathrm{AB}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\widehat{\mathrm{BE}}}{\widehat{\mathrm{GA}}}}}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\widehat{\mathrm{IB}}}{\widehat{\mathrm{GA}}}}}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\widehat{\mathrm{GA}}}{\widehat{\mathrm{IB}}}}}}}}$$

Agora, para determinar a parte inteira de $\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{GA}}}{\overset{\frown}{\mathrm{IB}}}$, com um compasso com abertura igual a IB, centrado em G, marcamos o ponto J; com a mesma abertura, centrado em J marcamos o pondo K, de modo que $\overset{\frown}{\mathrm{EH}} \equiv \overset{\frown}{\mathrm{HI}} \equiv \overset{\frown}{\mathrm{GA}}$.

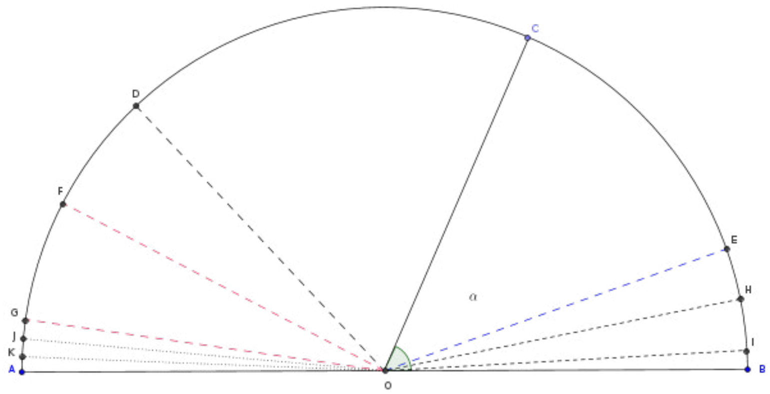

Figura 4.6: $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ cabe 2 vez em $\overset{\frown}{\mathrm{GA}}$

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Como $\overset{\frown}{\mathrm{KA}} < \overset{\frown}{\mathrm{IB}}$, concluímos que $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ cabe duas vezes em $\overset{\frown}{\mathrm{GA}}$. Temos, então

$$\frac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{GA}}}{\overset{\frown}{\mathrm{IB}}}}}}}} =$$

$$= 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{KA}}}{\overset{\frown}{\mathrm{IB}}}}}}}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{\overset{\frown}{\mathrm{IB}}}{\overset{\frown}{\mathrm{KA}}}}}}}}}$$

Dessa maneira, chegamos a $\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = [0; 2, 1, 2, 2, 2, 1, ...]$

Agora calculamos os convergentes conforme a tabela (3.3)

a_n		0	2	1	2	2	2	1	...
p_n	1	0	1	1	3	7	17	24	...
q_n	0	1	2	3	8	19	46	65	...

Tabela 4.2: Cálculo dos convergentes de $[0; 2, 1, 2, 2, 2, 1, ...]$

Usando o sétimo convergente, temos

$$\frac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = \frac{24}{65} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{180^\circ} = \frac{24}{65} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \frac{180^\circ \cdot 24}{65} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 66,46^\circ$$

Estimativa do erro: $e < \dfrac{1}{65^2} = \dfrac{1}{4225} < 0,00024$

4.5 Problemas Clássicos

4.5.1 Eclipse Lunar - Astronomia.

Um eclipse lunar é produzido quando a Lua penetra no cone de sombra criado pela Terra, ao interpor-se esta entre sol e a Lua. Isso acontece quando a lua cheia se encontra no nodo ascendente ou no nodo descendente da órbita que descreve ao redor da Terra.

Assim, um eclipse lunar depende

1) Do intervalo entre duas fases iguais consecutivas da Lua, o qual é chamado de *Mês Sinódico* e tem uma duração $x = 29,5306$ dias.

2) Do intervalo de tempo entre a passagem da lua por nodos consecutivos, o qual se chama *Mês Draconítico* e tem uma duração de $y = 27,2122$ dias.

O intervalo de tempo entre dois eclipses consecutivos é igual a uma quantidade inteira p de meses sinódicos, que por sua vez contém uma quantidade inteira q de meses draconíticos. É claro que a duração de p meses sinódicos é igual a uma quantidade k da duração de um único mês sinódico, isto é,

$$p = kx.$$

Do mesmo modo, na mesma proporção, a duração de q meses draconíticos é igual a uma quantidade k da duração de um único mês draconítico, isto é,

$$q = ky,$$

ou seja,

$$\frac{p}{q} = \frac{kx}{ky} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{x}{y}.$$

Queremos obter uma relação do tipo

$$qx = py$$

com p e q números inteiros positivos.

Como fazer isso? Como sabemos, $x = 29,5306$ e $y = 27,2123$. Isso nos leva a $\frac{x}{y} = 1,08519$, daí

$$\frac{p}{q} = 1,08519,$$

mas, como determinar p e q?

Exemplo 4.9. Com base no exposto acima, dado $\frac{p}{q} = 1,08519$, determine valores para p e q de maneira que $1,08519$ seja expresso com um erro menor que um milésimo.

Solução. Podemos resolver o problema determinando p e q por meio da análise dos convergentes de α. É o que segue.

Primeiro, escrevemos $1,08519 = \frac{108519}{100000}$.

Segundo, aplicamos o algoritmos de Euclides e determinamos os quocientes parciais:

	1	11	1	2	1	4	2	43	3
108519	10000	8519	6291	1835	393	263	130	3	1
8519	6291	2228	1835	393	263	130	1		

Tabela 4.3: Algoritmo de Euclides

Assim,

$$\frac{108519}{100000} = [1; 11, 1, 2, 1, 4, 2, 43, 3].$$

Terceiro, calculamos os convergentes:

Tabela 4.4: Cálculo das reduzidas conforme a tabela (3.3)

a_n		1	11	1	2	1	4	1	2	43	3
p_n	1	1	12	13	38	51	242	293	828	35897	108519
q_n	0	1	11	12	35	47	223	270	763	33079	100000

Se tomarmos o convergente $\frac{242}{223}$, o erro será menor que $\frac{1}{223^2} \approx 0,00002$. Desse modo, concluímos que

$$p = 242 \text{ e } q = 223.$$

Potanto, *223 meses sinódicos são equivalentes a 242 meses draconíticos.*

4.5.2 Engrenagens - Planetários

Os planetários são construções mecânicas que buscam representar, o mais fielmente possível, o movimento dos planetas e satélites, entre outros corpos celestes, ao redor de sua estrela. No caso do sistema solar, Frederico Greco, em [9], informa que em *Opuscoli Postumi*, publicada em 1703, Christiaan Huygens (1629-1695) usa frações contínuas numa situação real baseado no algorítimo da divisão euclidiana.

Huygens, matemático, astrônomo e físico holandês, precisava encontrar a aproximação da relação entre as engrenagens necessária para a construção de um planetário mecânico. Nesse aparato, as esferas que representavam os planetas giravam em torno de uma esfera que representava o Sol, respeitando a relação entre os seus períodos de revolução. Essa revolução era controlada por engrenagens, e ele tinha que determinar o número de dentes de cada engrenagem que faria a Terra e os outros planetas girarem. Mas se esse número fosse muito pequeno, seriam incapazes de movimentar a Terra e outros planetas corretamente; se fossem muito grandes, materialmente, tornaria inviável de alcançar.

Na época acreditava-se que o período de Saturno fosse de $29,46$ anos, ou seja, a cada giro de Saturno ao redor do Sol, a Terra gira $29,46$ vezes. Huygens teve a ideia de aproximar por frações o número 29,46. Pensou primeiro em 2946/100. Mas como construir uma engrenagem de 2946 dentes? Isso tornou essa fração impraticável. Usou frações contínuas e obteve as aproximações racionais $\frac{29}{1}, \frac{59}{2}, \frac{206}{7}$ para $29,46$. Ele analisou que engrenagens com 1 ou 2 dentes não são úteis e acabou por utilizar uma de 206 dentes para regular o movimento referente a Saturno e outra de 7 dentes regular o período da Terra.

Exemplo 4.10. Sabendo que atualmente considera-se correto que o período de Saturno em torno do Sol seja $29,43$ anos, se construíssemos hoje um planetário como o de Christian Huygens, quantos dentes teriam as engrenagens referentes a Saturno e a Terra?

Solução. Primeiro, indica-se o número na forma de fração decimal: $29,43 = \frac{2943}{100}$.

Segundo, executamos o algoritmo de Euclides e encontramos a fração contínua:

Tabela 4.5: Algoritmo de Euclides

	29	2	3	14
2943	100	43	14	1
43	14	1		

$$29,43 = [29; 2, 3, 14].$$

Terceiro, calculamos os convergentes da fração contínua:

Tabela 4.6: Cálculo dos convergentes de $29,43$

a_n		29	2	3	14
p_n	1	29	59	236	2943
q_n	0	1	2	7	100

O convergente correspondente ao que Huygens encontrou é $\frac{236}{7}$. Sendo assim, a engrenagem para Saturno deve ter 236 dentes, e a engrenagem para a Terra deve ter 7 dentes.

4.5.3 Calendários

O fato do ano ter sua duração de 365,242199 dias, ou 365 dias 5 horas 48 minutos e 46 segundos acarreta um problema sério na hora de organizar os calendários. Júlio César, imperador romano, na tentativa de uniformizar as datas ao longo de seu império, reformou o calendário em 46 a.C . Sua proposta consistia em acrescentar um dia ao ano, a cada quatro anos. Assim, depois de 3 anos de 365 dias, o quarto ano seria de 366 dias. Esse ano é chamado de bissexto, pois termina em dois dígitos iguais a 6. No calendário juliano, 2000, 2004, 2008, são exemplos de anos bissextos. Acontece que 16 séculos depois, a diferença entre o calendário juliano e o movimento real da Terra ao redor do Sol era gritante. O equinócio de primavera, entre outros fenômenos astronômicos, estava ocorrendo 10 dias após a data prevista. Por causa disso, o Papa Gregório XIII proclamou em 1582 um calendário no qual a duração do ano é igual a $365\frac{97}{400}$. No calendário juliano essa duração é de $365\frac{1}{4}$. Na prática, para um ano ser bissexto no calendário gregoriano não é suficiente que ele seja múltiplo de 4, é necessário também que ele seja divisível por 400. Dessa maneira, 2000 é ano bissexto, mas 1900 não o é. Qualquer calendário apresenta imprecisão, no caso do calendário gregoriano, esta será de mais 1 dia somente depois de 3236 anos. No calendário juliano, isso ocorrerá a cada 128 anos.

Dito isso, nos concentremos no problema matemático de organizar um calendário.

Exemplo 4.11. Sabendo que a diferença entre o ano civil e o ano trópico é de 5 horas 48 min e 49s ou 20.929s, em cada ano que se passa comete-se um erro de $\dfrac{20.929}{86.400}$ do dia. Procurar frações de correção mais simples e explicar a correção usual do ano bissesto, mostrando o erro que se comete.

Solução. Desenvolvendo $\dfrac{20929}{86400}$ em frações contínuas, tem-se:

	0	4	7	1	3	1	...
20929	86400	20929	2684	2141	543	512	**...**
20929	2684	2141	543	512	31	...	

Tabela 4.7: Quocientes parciais de $\frac{20929}{86400}$

$$\frac{20929}{86400} = [0; 4, 7, 1, 3, \dots]$$

Formando agora as frações reduzidas:

Tabela 4.8: Reduzidas de $\frac{20929}{86400}$

a_n		0	4	7	1	3	...
p_n	1	0	1	7	8	31	...
q_n	0	1	4	29	33	128	...

Isto é, o erro cometido pode ser tomado como $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, ...$ do dia.

No calendário Juliano considerava-se que em cada ano que se passava cometia-se um erro de $\frac{1}{4}$ do dia. Por isso, incluía-se um dia de 4 em 4 anos.

Como vimos, numa fração contínua, o erro cometido quando se pára numa determinada reduzida é maior que a unidade dividida pelo produto do denominador pela soma desse denominador com o denominador da reduzida seguinte. No caso do calendário juliano persistiu o erro de $\frac{1}{4(4+29)}$ do dia, ou $\frac{86400}{132}$, aproximadamente 654 segundos a cada ano. Este erro foi acumulando-se, o que determinou a reforma gregoriana.

$$e < \frac{1}{132}.$$

Em cada 100 anos comete-se um erro de por excesso maior do que $\frac{100}{132}$ e menor do que $\frac{100}{116}$. Este erro é compensado porque os anos divisíveis por 100 tem apenas 365 dias.

5 Mais Sobre Frações Contínuas

Chama-se frações contínuas todas as expressões da forma:

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}}$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ são numeros complexos ou funções.

Frações Contínuas Generalizadas ocorrem quando restringimos os valores de $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ a números inteiros.

O fato de um mesmo número poder ser expresso de formas diferentes em frações contínuas generalizadas, por exemplo

$$\sqrt{13} = 2 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{9}{\ddots}}} = 4 - \cfrac{3}{8 - \cfrac{3}{8 - \cfrac{3}{\ddots}}} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{\ddots}}}$$

levou os pesquisadores às *frações contínuas simples*, caso particular de frações contínuas generalizadas que ocorre quando $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são inteiros extritamente positivos e $b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 1$. Lembramos que se o número representado for racional, devemos ter $a_n \neq 1$. Com isso, a unicidade na representação de um número real por frações contínuas é garantida. De fato, se $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, e $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ são duas frações contínuas de um mesmo número, então:

$$a_0 = x_0,\ a_1 = x_1,\ \ldots,\ a_n = x_n$$

Portanto, as frações contínuas simples, nesse sentido, se sobressaem sobre as frações contínuas generalizadas. Entretanto, nem por isso essas últimas deixam de ter seus atrativos e belezas. O grande matemático indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 -

1920), por exemplo, fez as misteriosas expansões a seguir.

$$\sqrt{\varphi+2}-\varphi=\cfrac{\mathrm{e}^{-2\pi/5}}{1+\cfrac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{1+\cfrac{\mathrm{e}^{-4\pi}}{1+\cfrac{\mathrm{e}^{-6\pi}}{1+\cfrac{\mathrm{e}^{-8\pi}}{\ddots}}}}},\quad \text{em que}\quad \varphi=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Essa expressão conecta de forma hamônica φ, o número de ouro, e, a base dos logaritmos naturais e π, a constante mais importante da Matemática.

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{\ddots}}}}}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{e}\pi}{2}}.$$

Esta segunda fórmula, através de uma série matemática e uma fração contínua generalizada, estabelece uma relação entre as duas mais conhecidas constantes matemáticas.

Portanto, Frações Contínuas, em todas as formas, fornece resultados não apenas eficazes, mas também muito belos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos neste trabalho que Fração Contínua é um conceito da Matemática que serve para representar um número real, mas não só isso, acaba por fornecer também, através de suas propriedades, e das propriedades de seus elementos, ferramentas que permitem resolver problemas de variadas naturezas.

As frações contínuas constituem um tema que interliga muitos conceitos científicos. As operações necessárias para operacionalizá-las são muito simples, estando todas elas no Ensino Básico. Além de instrumentalizar os estudantes de ferramentas eficazes na interpretação e resolução de problemas, frações contínuas oferecem uma forma de classificar os Números Reais. Ademais, suas aplicações são vastas, gerando algoritmos simples e confiáveis seja quando se precisa aproximar um número real por outro mais simples, seja na resolução de equações diofantinas, entre tantas outras aplicações.

Muitos estudiosos, matemáticos, astrônomos, físicos, filósofos, religiosos, etc se ocuparam desse tema, cujas raízes se encontram nos primórdios da Matemática, e isso corrobora a abordagem desse tema no Ensino Básico.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1984.

[2] ANDRADE, E.X.L. e BRACCIALI, C.F. *Frações contínuas: propriedades e aplicações*. SBMAC, São Paulo, Plêiade, 2005.

[3] BESKIN, N.M. *Frações Contínuas* - Iniciação à Matemática. Editora Mir, 1987. Tradução de Pedro Lima.

[4] BOYER, C.B. *História da Matemática*. Ed. da Universidade de São Paulo, São Paulo-1974 .

[5] BROLEZZI, A.C. *A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática*. Tese de Doutorado. São Paulo, USP-1996.

[6] CANGUSSU, Everton S. *O Ensino de Sequências de Recorrências na Educação Básica com o Auxílio de Linguagem de Programação* Dissertação de Mestrado. São Luís, UFMA-2013.

[7] CENTURIÓN, Marília. *Números e Operações*. Editora Scipione. São Paulo, 1994.

[8] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

[9] GRECO, Federico. *Sulla Teoria Delle Frazioni Continue*. Tesi di Laurea in Teoria dei Numeri. Bologna, Università di Bologna-2012.

[10] HEFEZ, Abramo. *Elementos de aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[11] LIMA, Elon L. et. al. A Matemática do Ensino Médio. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004. v. 2. p. 1 - 40.

[12] KNOTT, Ron. *Continued Fractions – An introduction*. Disponível em <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html>. Acesso em: 20/07/2016 às 03:53h

[13] STEWART, Ian.. *História de las matemáticas en los últimos 10 000 años*. Tradução de Javier Garcia Sanz. 1 ed. Barcelona: Crítica, 2008.

[14] STEWART, Ian.. *O fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito*. Tradução George Schlesinger. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

[15] SANTOS, Antônio C. D. *Um Resgate Ás Frações Contínuas*. Dissertação de Mestrado. Fortaleza, UFCE - 2014.

[16] ROQUE, Tatiana. *História da matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[17] SANTOS, J. P. O. *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998.

[18] VELOSO, Paulo Dias. *Frações Contínuas e Análise Combinatória*. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico LTDA, 1950. p. 1 - 137.

[19] http://usuarios.upf.br/ pasqualotti/hiperdoc/natural.htm. Acesso em: 25/08/2016 às 12:12h.

[20] http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch03s01.html. Acesso em: 26/08/2016 às 10:53h

[21] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica, 2000b. Disponível em $< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >$. Acesso em: 18 jun. 2016.

Apêndice

7 Noções Básicas

As noções preliminares para compreender frações contínuas se encontram no Ensino Fundamental, noções de conjuntos, noções sobre o conjunto dos números naturais, conjunto dos números inteiros, conjunto dos números racionais, conjunto dos números irracionais, conjuntos dos números reais; assim como algoritmo da divisão de euclidiana, o conceito de divisor, de quociente e, de resto. Além disso, o conceito de máximo divisor comum (MDC) de dois números inteiros, e, porque agiliza o processo de encontrar os elementos de uma fração contínua, o Algoritmo de Euclides para determinar o MDC. Por isso, afim de justificá-lo, e por serem centrais, expõe-se aqui as ideias que seguem.

7.1 Máximo Divisor Comum

Dados dois número natura a e b, não ambos nulos, diz-se que o número natural não nulo d é um *divisor comum* de a e b se d divide a e d divide b.

Diremos que d é um *máximo divisor comum*, MDC de a e b se possuir as seguintes propriedades:

i) d é divisor comum de a e b;

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Assim, se d é o MDC de a e b, e c é um divisor comum de a e b, então $c \leq d$. O que nos mostra que d é efetivamente, dentre todos os divisores de a e b, o maior desses números.

Escrevemos $MDC(a, b)$ para representar o máximo divisor comum de a e b.

Proposição 7.1. *O MDC de dois números, quando existe, é único.*

Demonstração. Se d e d' são dois MDC de um mesmo par de números, então $d \leq d'$ e $d' \leq d$, consequentemente, $d = d'$. Portanto, o MDC de dois números é único. □

Proposição 7.2. *(**Lema de Euclides**) Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$ com $a < na < b$. Se existe o $MDC(a, b - na)$, então existe o $MDC(a, b)$ e*

$$MDC(a, b) = MDC(a, b - na).$$

Demonstração. Seja d=MDC(a, b-na). Como d divide a e d divide $(b - na)$, segue que d divide $b = b - na + na$ Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponhamos agora que c seja um divisor comum de a e b, isso implica que c é um divisor comum de $(b - na)$, logo, c divide d. Portanto, $d = MDC(a, b)$. □

7.2 Axioma da Boa Ordenação

Hefez, no segundo seção 2.3 de [10], expõe como segue o axioma da boa ordenação.

Seja S um subconjunto dos números naturais. Diz-se que um número natural a é um menor elemento de S se possui as seguintes propriedades:

i) $a \in S$

ii) $\forall n \in S, a \leq n$

É imediato verificar que, se S possui um menor elemento, este é único. De fato, se a e a_0 são menores elementos de S, então $a \leq a_0$ e $a_0 \leq a$, o que implica, pela propriedade antissimétrica da relação de ordem, que $a = a_0$

Axioma 7.1. ***(Axioma da Boa Ordenação)*** *Em qualquer subconjunto de números naturais S, $S \subset \mathbb{N}$, com $S \neq \varnothing$, existe um menor elemento, ou seja, um número $n \in S$ menor ou igual que qualquer número de S.*

Teorema 7.1 (**Divisão euclidiana**)**.** *Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existe dois únicos números naturais q e r tais que*

$$b = a \cdot q + r, \quad \text{com} \quad 0 < r < a.$$

Demonstração. Suponha que $b > a$ e considere, enquanto forem naturais, os números

$$b, b - a, b - 2a, b - 3a, \dots, b - na, \dots$$

Pelo Axioma da Boa Ordenação, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - aq$. Provar-se-á que r tem a propriedade requerida, isto é, que $r < a$.

Se a divide b, então $r = 0$ e nada mais temos a provar. Se, ao contrário, a não divide b, então $r \neq a$ e, portanto, basta mostrar que não poder ocorrer $r > 0$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - qa$, teríamos $c = b - qa - a$, ou seja,

$$c = b - (q+1)a, \quad \text{com} \quad c < r,$$

o que contradiz o fato de r ser o menor elemento de S.

Portanto, tem-se que $b = aq + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r.

Para provar a unicidade, note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um multiplo de a, é pelo menos a. Assim, se $r = b - aq$ e $r' = b - aq'$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geq a$, o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, absurdo. Portanto, $r = r'$.

Daí segue-se que $b - aq = b - aq'$, de onde vem $aq = aq'$, o que implica $q = q'$. E isso conclui a demonstração. □

Os números q e r, sob o teorema acima, são chamados de *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

Queremos observar que a demonstração desse teorema fornece um procedimento executável (*um algoritmo*) para calcular o quociente e o resto da divisão de um número por outro, através de subtrações sucessivas.

Exemplo 7.1. Calcule o quociente e o resto da divisão de 23 por 6.

Solução. Consideremos as diferenças sucessivas:

$$23 - 6 = 17, \quad 17 - 6 = 11, \quad 11 - 6 = 5 < 6$$

Isso nos permite concluir que $q = 3$ e $r = 5$.

7.3 Algoritmo de Euclides

O algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum de dois número p e q, fornece os termos da fração contínua do número racional $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, o que justifica sua exposição aqui.

Apresentamos agora uma prova construtiva da existência do MDC dada por Euclides (Proposição 2, do livro VII, de Os Elementos). O método usado constitui o *Algoritmo de Euclides.*

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, suponhamos $a \leq b$. Se $a = 1$ ou $a = b$, ou ainda se a divide b, o $MDC(a, b) = a$. Suponhamos agora que $1 < a < b$ e que a não divide b. Logo pela divisão euclidiana, temos

$$b = aq_1 + r_1, \text{ com } r_1 < a.$$

Há duas possibilidades:

a) r_1 divide a, aplicando o lema de Euclides, proposição (7.2), temos

$$r_1 = MDC(a, r_1) = MDC(a, b - q_1 a) = MDC(a, b),$$

e termina o algoritmo, ou

b) r_1 não divide a, e neste caso, podemos efetuar a divisão de a por r_1, obtendo

$$a = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } r_2 < r_1.$$

Novamente, temos duas possibilidades:

a') r_2 divide r_1,e em tal caso, pelo lema de Euclides (7.2), temos

$$r_2 = MDC(r_1, r_2) = MDC(r_1, a - q_2 r_1) = MDC(r_1, a) = MDC(a, b - q_1 a) = MDC(a, b),$$

e paramos aqui, pois termina o algoritmo, ou

b') r_2 não divide r_1, e neste caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } r_3 < r_2.$$

Este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$ que não possui um menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum n, temos que r_n divide r_{n-1}, e isso implica que $MDC(a, b) = r_n$.

Um modo prático de sintetizar o algoritmo acima é o seguinte:

Primeiramente efetuamos a divisão $b = aq_1 + r_1$ e colocamos os números envolvidos no diagrama a seguir

	q_1
b	a
r_1	

Depois, efetuamos a divisão $a = r_1q + r_2$ e colocamos os números envolvidos no diagrama

	q_1	q_2
b	a	r_1
r_1	r_2	

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos

Tabela 7.1: Cálculo do $MDC(a, b)$

	q_1	q_2	q_3	$\ldots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
b	a	r_1	r_2	$\ldots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = MDC(a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\ldots$	r_n		

Para ilustrar o uso desse algoritmo, seguem dois exemplos.

Exemplo 7.2. Deternine o $MDC(160, 32)$ usando o algoritmo de Euclides.

Solução. Conforme o algoritmo descrito na tabela (7.1), temos:

	1	1	37
300	152	148	4
148	4		

Desse modo, o $MDC(300, 152) = 4$.

Exemplo 7.3. Deternine o $MDC(1425, 325)$ usando o algoritmo de Euclides.

Solução. Conforme a tabela (7.1), temos

	4	2	1	1	25
1425	325	125	75	50	25
125	75	50	25		

Poranto,

$$MDC(1425, 325) = 25.$$

7.4 Princípio dos Intervalos Encaixados

Este princípio, devido ao grande matemático russo George Cantor (1845 - 1918), formaliza a noção intuitiva que diz que uma reta é contínua, initerrupta.

Sabe-se que um segmento de reta $\overline{AB}$ é um conjunto de pontos da reta compostos pelos pontos extremos a e b e por todos os pontos situados entre estes. Representa-se este seguimento pelo símbolo $[a, b]$, de modo que pode-se escrever:

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

Sendo assim, considere-se a sucessão infinita de segmentos:

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,$$

que satisfaz as condições:

I) Cada segmento, a começar do segundo, está encaixada no anterior;

II) O comprimento dos segmentos tende para zero a medida que n tende para infinito.

A primeira condição garante que todos os pontos do segmento de ordem n pertencem ao segmento de ordem $n-1$. Isto é

$$a_1 \leq a_2 \text{ e } b_1 \geq b_2$$

$$a_2 \leq a_3 \text{ e } b_2 \geq b_3$$

$$a_3 \leq a_4 \text{ e } b_3 \geq b_4$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{n-1} \leq a_n \text{ e } b_{n-1} \geq b_n$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

A segunda propriedade garante que se, inicialmente fixa-se arbitrariamente um comprimento l, existe um segmento de ordem n, tal que $[a_n, b_n]$ tem comprimento menor que l.

Considerando essas duas condições, existe apenas um ponto que pertence a todos os segmentos.

Axioma 7.2 (Axioma de Cantor). *Se numa reta for dada uma sequência infinita segmentos que satisfazem às condições I e II, então existe um, e somente um ponto que pertece a todos os segmentos dados.*

O Axioma de Cantor é uma forma de caracterizar um número real, isto é, é possível fazer uma correlação biunívoca entre uma sequência de intervalos encaixados e um número real.

Exemplo 7.4. Considere no eixo numérico os segmentos

$$[2,\ 3]\,,\left[\frac{9}{4},\ \frac{11}{4}\right],\ \left[\frac{17}{8},\ \frac{23}{8}\right],\ldots,\left[\frac{5}{2}-\frac{1}{2^n},\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2^n}\right],$$

$\frac{5}{2}$, conforme o Axioma de Cantor, é o único número que pertence a todos eles.

7.5 Sequências Numéricas

Aqui faremos uma exposição sumária sobre sequências numéricas.

Definição 7.1. Uma sequência (ou sucessão) de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o *n-ésimo termo* da sequência.

Escreve-se $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_n \in \mathbb{N}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência cujo n-ésimo temo é x_n.

Uma sequência x_n diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superiormente e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 7.2. Dada uma sequência $x = (x_n)_n \in \mathbb{N}$, uma *subsequência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$, ou $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x' = x \mid \mathbb{N}'$. A notação $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Exemplo 7.5. Denomine e represente a sequência dos números naturais pares, naturais ímpares, e dos números primos.

Solução. Seja A a sequência dos números naturas pares, B a sequência dos números naturais ímpares, e P a sequência dos números primos. Temos, portanto:

$$(a_n) = (0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots)$$

$$(b_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1, \ldots)$$

$$(p_n) = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots, 53, \ldots).$$

Exemplo 7.6. Calcule os quatro primeiros termos e escreva cada uma das sequências definidas por $a_n = n^2 + 1$ e $b_n = \dfrac{30}{n}$.

Solução. Fazendo $n = 1, 2, 3$ e 4, respectivamente em a_n e em b_n, temos:

$$a_1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_2 + 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$a_3 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_4 = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$$

assim, temos:

$$(a_n) = (2, 5, 10, 17, \dots).$$

$$b_1 = \frac{30}{1} = 30$$
$$b_2 = \frac{30}{2} = 15$$
$$b_3 = \frac{30}{3} = 10$$
$$b_4 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Assim, temos:

$$(b_n) = (30, 15, 10, \frac{15}{2}, \dots)$$

Exemplo 7.7. Defina e encontre uma subsequência de $(a_n) = (1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots)$.

Solução. Seja a sequência $(a_{3n})_n \in \mathbb{N}$, temos

$$(a_n) = (a_3, a_6, a_9, \dots, a_{3n}, \dots) = (5, 11, 17, \dots, 6n-1, \dots).$$

Definição 7.3. Diz que o número real L é o *limite* da sequência (x_n) quando, para todo número rel $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter o $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - L| < \varepsilon$. Escreve-se então $L = \lim x_n$.

Essa definição singnifica que, para vlores muito grandes de n, os termos x_n tornm-se e se mantêm tão próximos de L quanto se deseje. Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de L com erro menor do que ε.

Simbolicamente, escreve-se:

$$L = \lim x_n \ := \ \forall \varepsilon n > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - L| < \varepsilon.$$

Acima, o símbolo := significa que o que vem depois é a definição do que vem antes. $\forall$ significa "para todo". $\exists$ significa "existe". A barra vertical | que dizer "tal que" e a seta $\Rightarrow$ significa "implica".

Lembramos que $|x_n - L| < \varepsilon$ é o mesmo que $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, isto é, x_n pertence ao intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Assim, dizer que $L = \lim x_n$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro L contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$, onde n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo dado).

Para representar o limite de uma sequência escreve-se $L = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ ou $x_n \to L$. Esta última expressão lê-se "x_n tende para L" ou "converge para L". Uma sequência que possui limite diz-se it convergente. Caso contrário, ela se chama *divergente*.

Teorema 7.2 (Unicidade do limite). *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Seja $\lim a_n = L$. Dado $M \neq L$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $J = (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo não é $\lim x_n = b$. □

Teorema 7.3. *Se lim $x_n = L$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite L.*

Demonstração: Seja $(x_{n1}, \ldots, x_{nk}, \ldots)$ a subsequência. Dado qualquer intervalo I de centro L, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$ também pertecem a I. Logo $\lim x_{n_k} = L$. □

Teorema 7.4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $\lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \mathrm{x}_n \in (L - 1, l + 1)$. Sejam m o menor e n o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, L-1, L+1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[m, n]$, logo ela é limitada. □

7.5.1 Classificação das Sequências Numéricas

As sequências têm propriedade que as diferenciam, e algumas dessas são tão importantes que acabam por identificar e dar nomes especiais as sequências que as possuam. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita:

1. *estritamente crescente* se $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$;

2. *não-decrescente* se $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$;

3. *estritamente decrescente* se $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$;

4. *não-crescente* se $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$;

5. *monótona* se a sequência satisfaz alguma das propriedades acima (isto é, se ela é não-decrescente ou não-crescente);

6. *estritamente monótona* se ela é ou estritamente crescente ou estritamente decrescente;

7. *limitada superiormente* se existe $M \in \mathbb{R} <$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$;

8. *limitada inferiormente* se existe $m \in \mathbb{R} <$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq m$;

9. *limitada* se ela é limitada superior e inferiormente, ou seja, se $\exists M, m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n \leq M$;

10. *ilimitada* quando ela não é limitada nem superior e nem inferiormente;

11. *de Cauchy* se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \mid \forall n, m > n_0 \;\Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Teorema 7.5. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $L =$sup$X$. Afirmamos que $L =$lim x_n. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $L - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_{n_0} \leq L + \varepsilon$. Assim, $n_{n0} \Rightarrow$ L - $\varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < L + \varepsilon = L$. □

Exemplo 7.8. Prove, segundo a definição que a sequência definida por

$$a_n = \frac{30}{n}$$

converge para zero.

Solução. Basta provar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{30}{n} = 0.$$

Note que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 0| = \left| \frac{30}{n} - 0 \right| = \frac{30}{n} < n \Leftrightarrow n > \frac{30}{\varepsilon}.$$

Logo, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > \dfrac{30}{\varepsilon}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{30}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

o que está de acordo com a definição (7.3), como queríamos.

7.6 Sequências Recorrentes

Uma sequência *recorrente* é aquela cuja regra que permite encontrar os termos envolve termos anteriores àquele que se quer calcular. Isto é, o termo geral é dado em função dos termos que o antecede.

Exemplo 7.9. Determinar os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = a_{n-1} + 4$ e $a_1 = 3$

Solução.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = 7$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 = 11$$

$$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15$$

Portando, vemos aqui que cada termo foi calculado a partir do termo anterior.

Definição 7.4 (Definição Formal de Sequências Recorrentes). Dizemos que uma sequência (a_n) está definida de forma recorrente quando são dados o seus termos, do primeiro até uma posição k, e uma lei explícita que relaciona seu n-ésimo termo, $k < n$, com os k termos anteriores. Isto é, a_n é dado explicitamente por uma função $a_n = f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Sequências recorrentes são também chamadas de sequências indutivas ou recursivas.

Exemplo 7.10. Um senhor colocou um casal de coelhos num cercado. Quantos casais de coelhos podem ser gerados a partir desse casal ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada casal gera um novo casal, que se reproduz no segundo mês de vida?

Solução. Começamos visualizando a população na imagem abaixo: onde cada linha re-

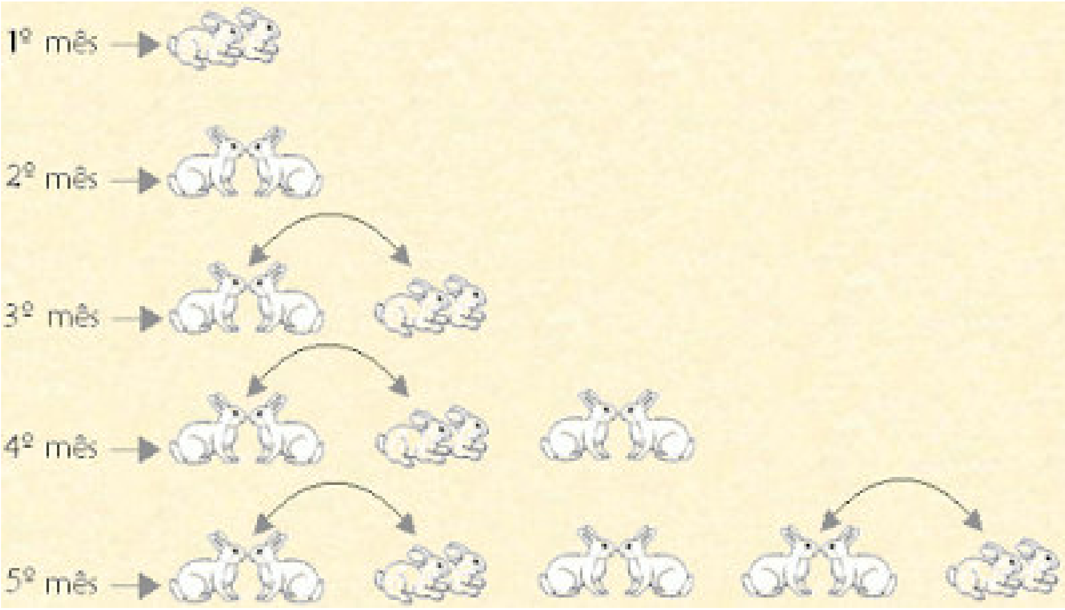

Figura 7.1: Coelhos de Fibonacci

Fonte: Disponível em http://matematicamentecontando.blogspot.com.br/2015/05/os-coelhos-de-fibonacci.html

presenta o mês, e a quantidade de casais de coelho na linha representa a população neste mês. Representando por (F_n) a sequência de Fibonacci, temos:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_3 = 2$$

$$F_4 = 3$$

$$F_5 = 5$$

$$F_6 = 8$$

$$F_7 = 13$$

$$F_8 = 21$$

$$F_9 = 34$$

$$F_{10} = 55$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$\vdots$$

Dessa maneira, ao fim do décimo mês ter-se-á 55 casais de coelhos. Não é difícil nota que cada termo é calculado conforme a fórmula recorrente:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } n > 2 \end{cases}$$