

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Pós-Graduação em Física

Alexsandro Lucena Mota

Vórtices BPS na eletrodinâmica de
Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo
quebrando as simetrias de CPT e de Lorentz

São Luís - MA

2014

Alexsandro Lucena Mota

Vórtices BPS na eletrodinâmica de
Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo
quebrando as simetrias de CPT e de Lorentz

Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito à obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos com violação da simetria de Lorentz e Teoria de Campos à temperatura finita.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís - MA

2014

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Mota, Alexsandro Lucena.

Vórtices BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo quebrando as simetrias de CPT e de Lorentz / Alexsandro Lucena Mota. - 2014.

71 p.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2014.

1. Acoplamento não-mínimo. 2. Violação da simetria de Lorentz. 3. Vórtices BPS. I. Sifuentes, Rodolfo Alván Casana. II. Título.

Alexsandro Lucena Mota

Vórtices BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo quebrando as simetrias de CPT e de Lorentz

Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito à obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Física de Partículas Elementares e Campos.

Linha de Pesquisa: Teoria de Campos com violação da simetria de Lorentz e Teoria de Campos à temperatura finita.

Aprovado em: _____ de _____ de 2014.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes (Orientador)
Departamento de Física - UFMA

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr.
Departamento de Física - UFMA

Prof. Dr. Van Sérgio da Silva Alves
Departamento de Física - UFPA

São Luís - MA

2014

Agradecimentos

Agradeço aos meus mentores, Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes (meu orientador) e Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr , pela paciência, pelos conselhos e inúmeros debates versados em física, incentivo e apoio dado ao longo de minha jornada acadêmica. A seriedade e dedicação com que ambos desenvolvem nova física me inspira e motiva a querer trabalhar mais e mais a cada novo dia. Aos demais professores do Departamento de Física da UFMA e do Programa de Pós-Graduação em Física que de maneira direta, ou indireta, contribuíram, em suas aulas, para os conhecimentos que adquirir ao longo desta jornada. Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro, que possibilitou realização deste trabalho. Não poderia deixar de agradecer também aos amigos do Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos - GFTPC: Poliane Lima de Sousa, Carlisson Miller, Emerson Chaves, Guillermo Lazar, Letícia Lisboa, Esdras Barbosa dos Santos, Ronald Meireles, Emanuel Cardozo Diniz. Em especial à André Cavalcante, Jonas Araújo e Victor Elias Moucherek pelas sugestões e críticas que em muito contribuíram para a melhoria da redação desta dissertação, além, é claro, dos inúmeros debates à respeito deste e de outros temas. Também agradeço à Ana Lúcia e José Martins por me acolherem como um filho, fazendo de sua família a minha família. Agradeço à minha mãe, Antônia, pelos valores ensinados a mim, que me fizeram um homem perseverante que respeita o próximo e que busca seus objetivos sem passar por cima de ninguém. Agradeço a todos os meus familiares, em especial aos meus irmãos Anderson e Amanda, pela união e por acreditarem em mim. Por fim, agradeço à Lidiane Cristina por seu amor incondicional, confiança, respeito, carinho, compreensão, acolhendo-me nos momentos mais difíceis e por não me deixar desistir nunca, permanecendo ao meu lado sempre.

"No que diz respeito ao empenho, ao compromisso, ao esforço, à dedicação, não existe meio termo. Ou você faz uma coisa bem feita ou não faz."

Ayrton Senna da Silva

Resumo

Os primeiros estudos sobre vórtices BPS no contexto da violação da simetria de Lorentz foram realizadas no marco teórico do modelo padrão estendido (MPE). Especificamente, foram estudados os efeitos da quebra de Lorentz sobre os vórtices existentes na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs. Também, foram estudadas a formação de vórtices em modelos (1+2)-dimensionais obtidos via redução dimensional do setor Abelião do MPE. Entre os diversos efeitos da quebra de Lorentz podemos citar: controle da amplitude e largura do vórtice, inversão do campo magnético, fluxo magnético quantizado com dependência explícita nos coeficientes da quebra de Lorentz, etc. Nesta dissertação estudamos a existência de vórtices topológicos em um modelo de Maxwell-Higgs cuja derivada covariante é modificada pela inclusão de um termo CPT-ímpar, o qual quebra a simetria de Lorentz devido a presença de um campo de fundo vetorial. A interação, que gera um sistema de equações auto-duais de primeira ordem, inclui um potencial $|\phi|^4$ e um acoplamento derivativo $|\partial_i\phi|^4$. Apesar das equações auto-duais serem bem diferentes daquelas do modelo de Maxwell-Higgs, os vórtices obtidos se comportam como aqueles de Aharonov-Nielsen-Olesen, mas a escala de massa depende explicitamente do coeficiente que controla a quebra de Lorentz.

Palavras-chaves: Defeitos topológicos, violação das simetrias de Lorentz e CPT, vórtices BPS.

Abstract

The first studies on Lorentz-violating BPS vórtices were accomplished within the framework of the Standard Model Extension (SME). Specifically, it was studied the effects of the Lorentz violation in the vortex solutions presented in the Maxwell-Higgs electrodynamics. The formation of vórtices was also analyzed in $(1+2)$ -dimensional models obtained by dimensional reduction of the SME Abelian sector. Among the several effects of the Lorentz violation we can mention: the control of both the amplitude as the width of the vortex, magnetic field reversion, magnetic flux quantization with explicit dependence on the Lorentz-violating coefficients. In this dissertation we study the existence of topological BPS vórtices in a Maxwell-Higgs model in which the covariant derivative is modified by the addition of a CPT-odd term, which breaks the CPT- and Lorentz symmetry due to the presence of a vectorial background. The interaction generating a set of self-dual or first-order equations includes a potential $|\phi|^4$ and a derivative coupling $|\partial_i\phi|^4$. Although the self-dual equations are very different of those belonging to the usual Maxwell-Higgs model, the new vortex solutions behave just like the Aharonov-Nielsen-Olesen ones, but the mass scale depends explicitly on the Lorentz-violating coefficient. **Key-words:** Topological Defects, Lorentz and CPT symmetry violation, BPS vórtices.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Comportamento das funções Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo de ordem zero e um. Por simplicidade escolheu-se $e = \nu = 1$	33
Figura 2	– Soluções numéricas para vórtices no modelo Maxwell-Higgs. Por simplicidade escolheu-se $e = \nu = 1$	34
Figura 3	– O perfil do campo de Higgs $g(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas negras ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs, e as linhas azuis para $\delta > 0$	46
Figura 4	– O perfil do campo de gauge $a(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas pretas ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis para $\delta > 0$	46
Figura 5	– O perfil do campo magnético $B(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas negras ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis para $\delta > 0$	47
Figura 6	– O perfil da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas negras ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis para $\delta > 0$	48
Figura 7	– Os perfis dos campos de Higgs $g(\rho)$ e gauge $a(\rho)$ para $\delta = -0.5$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual	49
Figura 8	– Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $\delta = -0,5$. A linha sólida representa as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.	50
Figura 9	– O perfil dos campos de Higgs $g(\rho)$ e gauge $a(\rho)$ para $\delta = 1$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs mínimo.	50
Figura 10	– Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $\delta = 1$. A linha sólida representa as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.	51

Sumário

Introdução	17
1 O método de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld (BPS)	23
1.1 O método BPS aplicado a um campo escalar genérico (1 + 1)-dimensional	23
2 Vórtices BPS no modelo Maxwell-Higgs	27
2.1 O modelo Maxwell-Higgs	27
2.2 A densidade de energia e o formalismo BPS	28
2.3 O ansatz de vórtices axialmente simétricos	30
2.4 Análise das condições de contorno	31
2.5 Soluções numéricas	33
3 Vórtices BPS no modelo Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo quebrando as simetrias de Lorentz e CPT	37
3.1 O modelo de Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo	39
3.2 A densidade de energia e as equações BPS	40
3.3 A projeção no ansatz de soluções axialmente simétricas	42
3.4 A análise das condições de contorno	44
3.5 Soluções Numéricas	45
3.5.1 Gráficos das soluções obtidas para $n = 1$ e $-1 \leq \delta \leq 1$	45
3.5.2 Gráficos das soluções obtidas para $\delta = -0.5$ e $n = 1, 4, 10, 20$	48
3.5.3 Gráficos das soluções obtidas para $\delta = 1$ e $n = 1, 4, 10, 20$	49
Conclusões e perspectivas	51
Referências	55
Apêndices	63
APÊNDICE A Cálculo de algumas identidades	65
A.1 Identidades do capítulo 2	65
A.2 Identidades do capítulo 3	66
Anexos	69
Ata de defesa de dissertação de mestrado em física	71

Introdução

Um dos primeiros modelos envolvendo vórtices de que se tem notícia talvez seja a *Teoria Cosmológica de Descartes* na qual, ostensivamente, planetas eram varridos através do espaço por uma linha de vórtices gigante orientada perpendicularmente ao plano do sistema solar. Essa teoria, à época, foi muito criticada por Newton, que afirmou: “*A hipótese dos vórtices é pressionada com muitas dificuldades*” [1]. Esse ponto de vista newtoniano prevaleceu, muito embora a teoria de Descartes tivesse ganho um grande número de adeptos no continente europeu.

O conceito de vórtice como estrutura estável é usualmente encontrado em teorias fluido-dinâmicas dos escoamentos turbulentos, descrito dentro do ferramental da mecânica clássica. O vórtice é formado quando uma determinada região do fluido começa a girar, de forma estacionária ou quase estacionária, em torno de um eixo central geralmente reto, mas que pode também ser curvo. Este tipo clássico de vórtice pode ser observado em líquidos, gases e plasmas, constituindo os usuais turbilhões em meios líquidos, e é o cerne de fenômenos meteorológicos de intensidade, como as trombas d’água, os furacões e tornados. São caracterizados por uma grandeza denominada vorticidade, que reflete a rotação local de um dado ponto do fluido, do ponto de vista que um observador que se locomove junto com o fluido. A vorticidade é dada pelo rotacional da velocidade do fluido, $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, não devendo este ser confundido com a velocidade angular do fluido em torno do eixo de rotação. Experimentalmente, a vorticidade pode ser observada através da inserção de uma pequena bola rígida no fluido em movimento: se a bola girar em torno do seu eixo, então a vorticidade é não nula, apontando na direção do eixo de rotação da bola (regra da mão direita), e sendo sua magnitude proporcional a velocidade angular da bola. Uma vez formados, os vórtices podem permanecer parados ou se deslocar nos meios fluidos, podendo torcer-se, deformar-se, e certamente interagir com outros vórtices, o que é uma temática de interesse nos diversos sistemas onde são observados. Outro ambiente teórico em que os vórtices podem ser concebidos e estudados é o domínio das teorias eletromagnéticas. Um modelo importante neste contexto, datando de 1867, é o modelo de vórtices para átomos, proposto pelo Sir William Thomson (Lord Kelvin) [2]. Segundo Thomson, esse modelo poderia ser representado por estruturas nodosas em um fluido ideal. A topologia do nó poderia ser imutável, correspondendo a imutabilidade química dos átomos.

A relevância do vórtices em sistema da Física da Matéria Condensada começou a ser estabelecida a partir da descoberta dos supercondutores tipo II, por Lev Shubnikov e Nikolay Zavaritskii, e do talento de Abrikosov [3], que no ano de 1957 soube aplicar a teoria de transição

de fase de Ginzburg-Landau¹, aproveitando-se de algumas das ideias de Lars Onsager e Richard Feynman sobre vórtices quantizados em superfluidos, à descrição do novo fenômeno.

Abrikosov descreveu os supercondutores tipo II em termos de duas fases supercondutoras, a fase I, caracterizada pelo efeito Meisner, em que não há qualquer penetração de campo magnético, e a fase II, em que o campo magnético penetra no material de forma localizada, através de pequenos filamentos de fluxo magnético, que correspondem à vórtices eletromagnéticos, no interior dos quais o material encontra-se na fase normal (não supercondutora). Abrikosov observou ainda que a estrutura de distribuição dos filamentos é periódica mantendo a simetria de uma rede quadrada, remetendo ao padrão de filamentos de vórtices encontrado por Onsager [10] e Feynman [11] ao estudar a distribuição de superfluidez em hélio II. Abrikosov ainda observou que, quando tais filamentos estavam suficientemente separados, eles tornavam-se independentes um do outro, podendo, então, serem estudados separadamente. Nesta situação, o problema apresentava-se como tendo simetria cilíndrica. Além disso, a topologia surge do fato que a variedade (manifold) do vácuo é um círculo, desde que a fase do campo escalar seja arbitrária. Os vórtices, então, só existem na versão bi-dimensional da teoria e são chamados de fluxo de vórtices magnéticos. Em três dimensões esses vórtices estendem-se para dentro de tubos e transportam o fluxo magnético através do supercondutor.

Sendo a teoria de Maxwell o protótipo das modernas teorias de campos do século XX, a existência de vórtices em sistemas eletromagnéticos veio a motivar o estudo destas estruturas em sistemas descritos por teorias de campos. A investigação pioneira neste contexto coube a Nielsen e Olesen [12], que demonstraram a existência de vórtices estáveis no âmbito da teoria de Maxwell-Higgs. O trabalho de Nielsen e Olesen inspirou Schaposnik e de Vega a buscarem uma solução exata para vórtices (usando o modelo Higgs Abelian) ao tomarem uma particular relação entre as constantes de acoplamento [13]. Estudos posteriores demonstraram que vórtices existem como excitações estáveis, tipo sólitons, de sistemas da Física da Matéria Condensada, da Física de Partículas e Campos, e dos sistemas gravitacionais, onde algumas considerações topológicas são também relevantes para justificar sua estabilidade.

Vórtices também foram estudados no contexto da eletrodinâmica de Chern-Simons (CS) [14] provendo a possibilidade de vórtices eletricamente carregados [15–17]. Soluções de vórtices, na presença do termo de Chern-Simons com *quebra espontânea de simetria*, também foram consideradas por Jackiw, Lee e Weinberg satisfazendo um conjunto de equações auto-duais, também conhecidas como equações de Bogomol’nyi, Prasad e Sommerfield (BPS) [18–21]. Outros trabalhos incluem ainda o estudo de soluções multi-vórtices [22] e soluções de vórtices com energia de ligação obtidas a partir do acoplamento do setor fermiônico ao campo de

¹ A teoria de Ginzburg-Landau [4, 5] é uma teoria fenomenológica que descreve supercondutores do tipo I sem examinar suas propriedades microscópicas. Uma versão da teoria Ginzburg-Landau foi derivada a partir da teoria microscópica de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [6–8] por Lev Gor’kov [9], mostrando que a supercondutividade também surge em algum limite da teoria microscópica. A teoria também prevê a existência de supercondutores do tipo II, porém não os descreve.

Maxwell-Chern-Simons (MCS) [23].

Uma generalização do modelo Higgs Abeliano foi primeiramente considerada por [Paul e Khare](#) na qual termos de CS foram gerados via quebra espontânea de simetria [24]. O modelo Higgs Abeliano, generalizado por eles, era governado pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{MHAG} = -\frac{1}{4}(1 + g^2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu)^*(\mathcal{D}^\mu) - c^4\left(|\phi|^2 - \frac{1}{2}\frac{c_2}{c_4}\right)^2, \quad (1)$$

onde

$$\mathcal{D}^\mu\phi = \partial^\mu\phi + ieA^\mu\phi + ig\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\nu A_\rho)\phi/|\phi|, \quad (2)$$

é a derivada covariante não mínima e g é uma constante de acoplamento. A análise deste modelo mostrou que dois vórtices neutros de energia finita são gerados em cada setor topologicamente não trivial, ao invés dos vórtices carregados obtidos a partir do modelo Higgs Abeliano usual, no qual o termo CS é adicionado diretamente à lagrangiana [16, 24]. Em uma outra proposta, [Jatkar e Khare](#) mostraram que é possível obter soluções peculiares de vórtices carregados (de energia finita) na ausência do termo de CS, em um modelo Higgs Abeliano com dois campos de Higgs onde um deles é acoplado minimamente e outro não, correspondendo a uma generalização do modelo proposto na eq. (1) [25].

Outro modelo no qual se levou em conta uma contribuição não-mínima foi apresentado por [Torres](#) ao propor uma generalização do modelo Chern-Simons-Higgs Abeliano

$$\mathcal{L}_{MCSHA} = \mathcal{L}_{MHA} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu F_{\nu\alpha}, \quad (3)$$

com a derivada covariante dada por

$$\mathcal{D}^\mu\phi = \left[\partial^\mu - ieA^\mu\phi - i\frac{g}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \right] \phi, \quad (4)$$

onde, segundo [Torres](#), g é interpretado como sendo momento magnético anômalo [26]. Tal interpretação foi inspirada no fato de que, em (1+2)-dimensões, o acoplamento Pauli para férmions pode ser escrito como $\bar{\psi}\sigma\psi F_{\mu\nu} = 1/2\varepsilon^{\mu\nu\rho}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi F_{\nu\rho}$, o que possibilita que o acoplamento Pauli seja incorporado em uma derivada covariante generalizada, a qual pode ser usada sem qualquer referência ao grau de liberdade do spin. Considerando uma relação especial entre a massa CS e o acoplamento anômalo magnético, [Torres](#) encontrou vórtices BPS carregados. Em um outro trabalho, [Ghosh](#) mostrou que o modelo de [Torres](#) pode ser obtido como um caso especial do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs Abeliano generalizado, composto de uma “função dielétrica” multiplicada pelo termo de Maxwell e presente no acoplamento não mínimo. Além disso, ele também encontrou vórtices carregados de energia mínima, topológicos e não topológicos, onde a lei de Gauss para esses vórtices é de primeira ordem [27]. As investigações em modelos providos de acoplamentos não mínimos ainda foram feitas em modelos não abelianos envolvendo dois campos escalares (tripletos no espaço de isospin) [28] em teorias quadri-fermiônicas acopladas a um campo de gauge Yang-Mills-Chern-Simons [29, 30] e em modelos de matéria condensada [31].

A inclusão de termos que *violam a simetria de Lorentz* (VSL) em teorias físicas conhecidas tem sido bastante considerada nos últimos anos, proporcionando uma consequente extensão do modelo padrão usual. A mais ampla extensão teórica, congregando termos de violação de Lorentz em todos os setores do modelo padrão (MP), é denominada *modelo padrão estendido* (MPE) [32–34]. Neste, os termos de violação advêm da *quebra espontânea da simetria de Lorentz* ocorrida no contexto de teorias de cordas, gerando valores esperados no vácuo não nulos, de natureza tensorial, que se acoplam a todos os campos do modelo padrão [35–39]. As investigações no âmbito do MPE concentram-se principalmente no setor férmions [40–47], no setor de gauge [48–56] incluindo também extensões envolvendo a gravidade [57–60].

Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre *defeitos topológicos* também foram investigados em cenários distintos. Alguns trabalhos têm examinado o papel desempenhado pela VSL sobre defeitos definidos no cenário de sistemas escalares [61–64], revelando as propriedades associadas e mostrando que há preservação de estabilidade linear nas soluções. Um estudo mais completo da topologia de defeitos, no contexto de teorias de campo dotados de um tensor de quebra espontânea de simetria de Lorentz, foi realizado em Ref. [65].

Um estudo pioneiro de vórtices com violação da simetria de Lorentz foi primeiramente analisado por [Scarpelli et al.](#) [66], partindo da seguinte densidade lagrangiana tipo Chern-Simons

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu)^*(D^\mu) - \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\rho\mu\nu\alpha}v_\rho A_\mu F_{\nu\alpha} + m^2|\phi| + \lambda|\phi|^4, \quad (5)$$

dotada de um acoplamento mínimo $D^\mu\phi = \partial^\mu\phi + ieA^\mu\phi$, onde κ é um parâmetro de massa e v_ρ é um quadri-vetor arbitrário que seleciona a direção privilegiada do espaço-tempo. Neste trabalho, os autores investigaram configurações de vórtices a partir das equações de segunda ordem tomadas na região assintótica e, a partir do confronto com os resultados obtidos por [Carroll, Field e Jackiw](#) [48], compreenderam que, uma vez que v_ρ é escolhido para ser do tipo espaço, a energia do sistema é limitada para baixo, o que atribuía ao vórtice uma configuração estável. Contribuições, também endereçadas a configurações de vórtices, também foram feitas em cenários não comutativos, no entanto, a violação da simetria de Lorentz era obtida apenas como um subproduto [67, 68].

Contudo, foi somente com [Casana et al.](#) que vórtices estáveis, primeiramente descarregados [69] e, posteriormente, carregados [70] foram obtidos no contexto das violações das simetrias de Lorentz e CPT-par em uma eletrodinâmica Maxwell-Higgs Abeliana. No primeiro caso os autores inicialmente investigaram o setor de gauge do modelo padrão estendido governado pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_\alpha{}^\sigma + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - U(|\phi|), \quad (6)$$

onde

$$U(|\phi|) = \frac{e^2}{2(1-s)}(v^2 - |\phi|^2)^2, \quad (7)$$

com $s = \text{tr}(\kappa_{ij})$ e v fazendo o papel do valor esperado no vácuo do campo escalar. Neste caso, verifica-se a existência de soluções BPS, regidos por equações análogas ao modelo MHA. O parâmetro que viola a simetria de Lorentz aparece como um elemento chave para a definição de uma constante efetiva de acoplamento elétrico e modifica a massa dos campos de Higgs. Os perfis de vórtice, gerados por métodos numéricos, revelam que o parâmetro de violação de Lorentz atua como um elemento capaz de controlar a extensão radial do defeito (núcleo do vórtice) de um modo semelhante ao observado nas teorias campo k que geram estruturas do tipo compactas.

Em seguida, a fim de se fazer uma descrição mais completa de um cenário de violação da simetria de Lorentz com soluções que suportam vórtices, foram considerados, além do setor de gauge, dois novos termos de violação de Lorentz e CPT-par do modelo, sendo a densidade lagrangiana agora descrita por

$$\mathcal{L}_{II} = \mathcal{L}_I + (\kappa_{\phi\phi})^{\mu\nu} (D_\mu\phi)^* (D_\nu\phi) - U(|\phi|), \quad (8)$$

onde, neste novo cenário, o novo potencial é dado por

$$U(|\phi|) = \frac{\eta^2 e^2}{2(1-s)} \left(\frac{v^2}{\eta} - |\phi|^2 \right)^2, \quad (9)$$

com

$$\eta = \sqrt{[1 - (\kappa_{\phi\phi})_{\theta\theta}][1 - (\kappa_{\phi\phi})_{rr}]}. \quad (10)$$

Na análise deste modelo, os autores obtiveram as equações de movimento e avaliaram que o potencial compatível com as soluções BPS seria de quarta ordem, implicando assim em dois vácuos. Após mostrarem que o parâmetro de violação de Lorentz induzia instabilidade de energia, encontraram um potencial de auto-interação dotado de apenas um vácuo que finalmente conduzia as equações geravam vórtices BPS descarregados e estáveis. Por fim, os autores demonstraram que as soluções assintóticas são compatíveis apenas com um ansatz de vórtice modificado que produz uma quantização fracionária do fluxo magnético.

Esta dissertação de mestrado tem por objetivo investigar os efeitos de um acoplamento não-mínimo envolvendo o campo escalar do setor de Higgs e um *background* de violação da simetria de Lorentz no setor CPT-ímpar, ξ_μ . Esse acoplamento envolve 4 componentes de violação de Lorentz contidas no tensor, que compõe a parte CPT-ímpar do setor de gauge do MPE. Tal acoplamento não-mínimo pode ser definido a partir da seguinte derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu + iF_{\mu\nu}\xi^\nu, \quad (11)$$

que, inserida na densidade lagrangiana para o modelo Maxwell-Higgs, a saber

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^* (D^\mu\phi) - U(|\phi|), \quad (12)$$

conduz a uma eletrodinâmica escalar modificada, a qual constitui nosso objeto de estudo.

A fim de alcançarmos nosso objetivo, apresentamos no [Capítulo 1](#) o método de [Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield](#) (BPS) e veremos que o mesmo consiste em expressar a densidade de energia como uma soma de termos quadráticos, um termo proporcional ao campo magnético e uma derivada total. Os termos quadráticos quando nulos proverão as equações BPS ou auto-duais cujas soluções serão estáveis e energia total proporcional ao fluxo magnético. Tal situação é possível se condições de contorno apropriadas são impostas sobre os campos, de tal modo que a integral da derivada total é nula.

No [Capítulo 2](#) faremos uma breve revisão do Modelo Maxwell-Higgs, obtendo soluções para vórtices BPS. No [Capítulo 3](#) apresentaremos formalmente o modelo Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo que quebra as simetrias de Lorentz e CPT, onde objetivamos entender os possíveis novos efeitos provido pelo campo de fundo ξ_μ .

Ao final, resumizamos os resultados contidos neste trabalho e apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

1 O método de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld (BPS)

Em 1976, Bogomol'nyi e Vainshtein publicaram um artigo [71] no qual discutiram numericamente o problema da estabilidade de uma *linha de vórtices* (também chamada *corda*). Eles observaram que o decaimento da linha de vórtices com circulação $|n| \geq 2$ é energeticamente possível, e classicamente instável, desde que a razão entre os quadrados das massas dos campos escalar m_s e vetorial m_v , denotada por β , seja maior que a unidade, ou seja, $\beta > 1$.

Em um artigo posterior, também de 1976, ainda motivado pelo problema da estabilidade de soluções de campos clássicos, Bogomol'nyi [19] apresentou um método que o permitiu obter analiticamente os valores das massas tanto das linhas de vórtices com diferentes circulações para $\beta = 1$, quanto para monopólos e dyons para $\beta \rightarrow 0$. O método, que primeiramente foi apresentado para soluções clássicas do tipo parede de domínio, consistia em escrever os termos da densidade de energia na forma de quadrados perfeitos e, então, minimizar a energia impondo o cancelamento dos termos quadráticos, o qual conduziu a equações diferenciais de primeira ordem, que, além de serem mais facilmente resolvidas, também satisfazem as equações de Euler-Lagrange (equações diferenciais de segunda ordem), sendo, portanto, soluções legítimas do sistema. Os termos não quadráticos eram, então, integrados desde que os campos estivessem sujeitos a certas condições de contorno inerentes ao sistema. A energia mínima resultante deste procedimento ficou conhecida como limite de Bogomol'nyi. Ainda no mesmo artigo, Bogomol'nyi generalizou o método na busca de soluções estáveis para linhas de vórtices, monopólos magnéticos e dyons.

Curiosamente, após a publicação de seu trabalho, Bogomol'nyi tomou conhecimento da existência do artigo de Prasad e Sommerfield [20], publicado em 1975, na qual os autores já haviam obtido pelo mesmo método soluções de energia finita para monopólos de 't Hooft e dyon de Julia-Zee para $\beta \rightarrow 0$. Por essa razão, o método ficou conhecido como *método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield*, ou simplesmente *método BPS*.

1.1 O método BPS aplicado a um campo escalar genérico (1+1)-dimensional

A seguir, apresentaremos o método aplicado-o a um sistema (1+1)-dimensional composto de um campo escalar real $\varphi(t, x)$ para algum potencial genérico que denotamos por $V(\varphi)$. A densidade lagrangiana para esse sistema é escrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi). \quad (1.1)$$

A partir desta construímos a respectiva densidade hamiltoniana, a qual é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi). \quad (1.2)$$

Aplicando-se o princípio variacional na eq. (1.1) ou na (1.2), encontramos a equação de movimento do sistema como sendo:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.3)$$

Nota-se que as equações do tipo (1.3) fornecem tanto soluções dinâmicas $\varphi(x, t)$ quanto estacionárias $\varphi(x)$. As soluções dinâmicas podem ser obtidas a partir das soluções estacionárias quando um *boost* de Lorentz na forma $x \rightarrow \gamma(x - vt)$, com $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2}$, é aplicada às soluções $\varphi(x)$. Assim, sem perda de generalidade, podemos trabalhar somente com as soluções estáticas de modo que o problema central se reduz a resolver a versão estacionária da eq. (1.3), que agora é escrita na forma

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (1.4)$$

Uma solução completa do problema não será possível se não estabelecermos sob quais condições assintóticas $\varphi(x)$ deve ser comportar. Para tanto, convém escrevermos a energia estacionária do sistema, a qual é dada pela integral sobre todo espaço da densidade hamiltoniana, eq. (1.2), como:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + V(\varphi) \right] dx. \quad (1.5)$$

Neste ponto, lembramos o que afirma **Bogomol'nyi** no primeiro parágrafo da introdução de seu artigo de 1976 [19]: “*Uma condição necessária para a aplicabilidade de soluções das equações de campos clássicos à construção de objetos estendidos a mecânica-quântica é a estabilidade de tais soluções sob pequenas perturbações*”. Assim, exige-se que a energia estacionária do sistema deva ser finita, positiva e limitada inferiormente. Além disso, na região em que $x \rightarrow \pm\infty$, a densidade de energia deve ser localizada, o que implica que para alguma solução do campo $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) = \varphi_0$, devemos ter $E(x \rightarrow \pm\infty) = E_0 \rightarrow 0$. Posto isso, conclui-se, a partir de (1.5), que as condições assintóticas que buscamos devem ser válidas para:

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{\varphi=\varphi_0} \rightarrow 0, \quad V(\varphi = \varphi_0) \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

De (1.6) inferimos que, para $x \rightarrow \pm\infty$, o campo $\varphi(x)$ deve assumir valores constantes $\varphi_0 = \varphi_\pm$ de tal forma que o potencial nessa região deva ser nulo. Formalmente, escrevemos

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_\pm \text{ para } x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.7)$$

que são, de fato, as condições de contorno do problema. No que diz respeito a essas condições, podem ocorrer dois casos. Primeiro: pode ocorrer de $\varphi_+ = \varphi_-$, e neste caso dizemos que a configuração de energia finita é não topológica. Segundo: pode ocorrer de $\varphi_+ \neq \varphi_-$ e a configuração é dita topológica.

Agora, estabelecidas as condições de contorno adequadas, pode-se resolver o problema integrando a eq. (1.4), o que constitui o método tradicional. Contudo, **Bogomol'nyi** resolveu o

problema por um método alternativo. Ele reescreveu a energia de modo a obter termos quadráticos perfeitos. Seguindo este método a energia estacionária da eq. (1.5) torna-se

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varphi}{dx} \mp \sqrt{2V(\varphi)} \right)^2 dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2V(\varphi)} \frac{d\varphi}{dx} dx. \quad (1.8)$$

Nota-se que o segundo termo poderá ser facilmente integrado se o potencial $V(\varphi)$ puder ser escrito como

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\varphi} \right)^2 \geq 0, \quad (1.9)$$

onde $W(\varphi)$ é uma função contínua e diferenciável. O uso das condições de contorno (1.7) conduz à

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varphi}{dx} \mp \frac{dW}{d\varphi} \right)^2 dx \pm [W(\varphi_+) - W(\varphi_-)]. \quad (1.10)$$

No que concerne ao primeiro termo, nota-se que este é definido positivo, implicando em contribuições da energia em torno de $W(\varphi_+) - W(\varphi_-)$. Desse modo, torna-se óbvio que o mínimo da energia é atingida para funções $\varphi(x)$ que satisfaçam

$$\frac{d\varphi}{dx} \mp \frac{dW}{d\varphi} = 0. \quad (1.11)$$

Portanto, a correspondente energia mínima do sistema é

$$E_{\min} = E_{BPS} = \pm [W(\varphi_+) - W(\varphi_-)]. \quad (1.12)$$

Do que foi apresentado, nota-se algumas peculiaridades:

1. Para se determinar a energia não é necessário conhecer a solução explícita da eq. (1.11), basta apenas que se conheça que uma tal solução exista. Em outras palavras, para calcularmos as energias basta usarmos a função $W(\varphi)$ por meio de seus limites assintóticos sem que seja necessário conhecer as soluções $\varphi(x)$.
2. A equação (1.11) é uma equação de primeira ordem que satisfaz a equação de segunda ordem (1.4) e, portanto, conduz a uma solução legítima do sistema.
3. Os estados, que são soluções de (1.11), são aqueles que minimizam a energia na forma (1.12) sendo estes denominados de estados BPS.

2 Vórtices BPS no modelo Maxwell-Higgs

Vórtices são estruturas planares, dotadas de simetria rotacional, livres de divergências e dotadas de energia total finita. Estas estruturas são obtidas por meio do tratamento numérico das equações de Euler-Lagrange. No entanto, vórtices podem também ser obtidos a partir de uma abordagem alternativa, mais simples e sofisticada, que provê soluções de mínima energia do modelo, a partir da resolução de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, denominadas equações BPS. Os vórtices obtidos por este procedimento são denominados vórtices BPS. Além disso, tais soluções são também soluções das equações de Euler-Lagrange, sendo, portanto, soluções legítimas da teoria [72].

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão sobre a obtenção de vórtices BPS a partir de um modelo Maxwell-Higgs Abeliano.

2.1 O modelo Maxwell-Higgs

A densidade lagrangiana que define a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - U(|\phi|), \quad (2.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético, $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$ é a derivada covariante que acopla minimamente os campos de gauge $A(x_\mu)$ e escalar $\phi(x_\mu)$, e $U(|\phi|)$ é o potencial, ainda a ser determinado, que descreve a auto-interação do campo escalar consigo próprio.

Uma vez que o propósito é fazer uma descrição de vórtices, definimos o modelo em um espaço-tempo 1 + 2 dimensional, cuja métrica cartesiana é dada por $\text{diag}(g_{\mu\nu}) = (+ - -)$, onde os índices gregos $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$ rotulam as coordenadas espaço-temporais, enquanto que índices latinos $i, j, \dots = 1, 2$ referem-se somente as coordenadas espaciais. Aqui, e no que se seguirá, a menos que seja especificado o contrário, adota-se o sistema de unidades naturais onde se faz $c = \hbar = 1$. Nesse sistema as dimensões de massa (M), comprimento (L) e tempo (T) estão relacionadas por $M = L^{-1} = T^{-1}$. A análise dimensional mostra que a constante de acoplamento, e , e os campos $A(x_\mu)$ e $\phi(x_\mu)$ têm dimensões de $M^{1/2}$, enquanto que o potencial $U(|\phi|)$ (e a própria densidade lagrangiana \mathcal{L}) tem dimensão de M^3 . Além disso, a densidade lagrangiana é invariante de gauge e Lorentz.

As equações de movimento associadas ao modelo, advindas da equação de Euler-Lagrange, são

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = eJ^\mu, \quad (2.2)$$

$$D_\mu D^\mu\phi = -\frac{\partial U(|\phi|)}{\partial\phi^*}, \quad (2.3)$$

onde

$$J_\mu = i \left[\phi (D_\mu \phi)^* - \phi^* (D_\mu \phi) \right] = i \left[\phi (\partial_\mu \phi)^* - \phi^* (\partial_\mu \phi) \right] - 2eA_\mu |\phi|^2, \quad (2.4)$$

é a corrente conservada, ou seja, $\partial_\mu J^\mu = 0$.

A lei de Gauss, obtida a partir eq. (2.2), é

$$\partial_i \partial_i A_0 - \partial_i \dot{A}_i = -eJ_0, \quad (2.5)$$

com

$$J_0 = i (\phi \dot{\phi}^* - \dot{\phi} \phi^*) - 2eA_0 |\phi|^2. \quad (2.6)$$

Desde que o cenário se apresente no regime estacionário, nota-se que a condição $A_0 = 0$ satisfaz identicamente a lei de Gauss. A implementação da escolha de tal condição implica na obtenção de soluções que descrevem configurações de vórtices puramente magnéticos. Considerando-se que sejam essas as condições, então, a lei de Ampère, que também advém da eq. (2.2), apresenta-se na forma

$$\epsilon_{ij} \partial_j B = eJ_i, \quad (2.7)$$

onde o campo magnético $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$ é um pseudo-escalar e a componente espacial da densidade de corrente é

$$J_i = i \left[\phi (\partial_i \phi)^* - \phi^* (\partial_i \phi) \right] - 2eA_i |\phi|^2. \quad (2.8)$$

Similarmente, a equação do campo de Higgs é lida como

$$\partial_j \partial_j \phi - ie (\partial_j A_j) \phi - 2ie A_j \partial_j \phi - e^2 A_j A_j \phi = \frac{\partial U(|\phi|)}{\partial \phi^*}. \quad (2.9)$$

2.2 A densidade de energia e o formalismo BPS

O potencial $U(|\phi|)$, que conduzirá a soluções do tipo vórtice, pode ser obtido pela minimização da densidade de energia do sistema. Para tal, devemos primeiramente determinar a energia funcional via a densidade hamiltoniana canônica escrita na forma padrão

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi_\phi \dot{\phi} + \pi_\phi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}, \quad (2.10)$$

onde os momentos conjugados canônicos dos campos de gauge e Higgs, π^μ , π_ϕ e π_ϕ^* , são dados por

$$\pi^\mu = -F^{0\mu}, \quad \pi_\phi = (D_0 \phi)^*, \quad \pi_\phi^* = (D_0 \phi). \quad (2.11)$$

Visto que \mathcal{H} é um funcional dos momentos e dos campos, torna-se conveniente reescrevermos em termos dos momentos, tanto a densidade lagrangiana (2.1),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\pi_j)^2 + |\pi_\phi|^2 - \frac{1}{2} B^2 - |D_k \phi|^2 - U(|\phi|), \quad (2.12)$$

quanto a lei de Gauss (2.2),

$$\partial_j \pi^j = ie(\phi \pi_\phi - \phi^* \pi_\phi^*), \quad (2.13)$$

onde para isso usou-se $\pi_0 = 0$ e $F_{ij} = \epsilon_{ij} B$. Assim, utilizando as eqs. (2.12) e (2.13) na eq. (2.10), encontramos que a densidade hamiltoniana canônica do modelo é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\pi_j)^2 + |\pi_\phi|^2 + \frac{1}{2}B^2 + |D_k \phi|^2 + U(|\phi|) + \partial_j(A_0 \pi^j). \quad (2.14)$$

Integrando a densidade hamiltoniana no plano, encontramos que a hamiltoniana total do sistema é

$$H = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\pi_j)^2 + |\pi_\phi|^2 + \frac{1}{2}B^2 + |D_k \phi|^2 + U(|\phi|) \right]. \quad (2.15)$$

Nota-se que a hamiltoniana total do sistema não depende explicitamente das coordenadas do espaço-tempo, sendo, portanto, equivalente à energia total do sistema, ou seja, $H = E$. Desse modo, desde que no regime estacionário $A_0 = 0$, os momentos conjugados se anulam e resulta que a energia estacionária do sistema é dada por

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2}B^2 + |D_k \phi|^2 + U(|\phi|) \right]. \quad (2.16)$$

Agora, implementamos o método BPS, o qual consiste em escrevermos a energia como soma de quadrados. Fazemos isso usando as seguintes identidades¹

$$\frac{1}{2}B^2 + U(|\phi|) = \frac{1}{2}(B \mp \sqrt{2U})^2 \pm \sqrt{2U}B, \quad (2.17)$$

$$|D_k \phi|^2 = |D_\pm \phi|^2 \pm i\epsilon_{ij}(D_i \phi)(D_j \phi)^*, \quad (2.18)$$

com

$$D_\pm \phi = D_1 \phi \pm iD_2 \phi, \quad (2.19)$$

onde se convencionou o sinal de (+) como sendo o do vórtice (com vorticidade $n > 0$) e o sinal de (−) como sendo o do anti-vórtice (com vorticidade $n < 0$). Tomando-se o “rotacional” da eq. (2.8), se pode mostrar que o último termo na eq. (2.18) é dado por:

$$i\epsilon_{mk}(D_k \phi)^*(D_m \phi) = eB|\phi|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{mk}\partial_m J_k. \quad (2.20)$$

Desse modo, ao substituírmos as expressões (2.17), (2.19) e (2.20) na eq. (2.16), a energia passa a ser escrita na forma

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(B \mp \sqrt{2U})^2 + |D_\pm \phi|^2 \pm \sqrt{2U}B \pm eB|\phi|^2 \pm \frac{1}{2}\partial_j(\epsilon_{ji}J_i) \right]. \quad (2.21)$$

Note-se que, se condições de contorno adequadas forem impostas sobre os campos, então a quadratura do último termo do integrando da eq. (2.21) não contribuirá para a energia total do

¹ No Apêndice A apresentamos em detalhes os cálculos que conduzem a eq. (2.18)

sistema, sendo, portanto, nula. Além do mais, conforme a prescrição de Bogomol'nyi [19], o mínimo da energia será obtido se os termos que são quadrados perfeitos forem também todos nulos. A condição de nulidade sobre estes termos conduz as equações BPS, as quais são equações diferenciais de primeira ordem, dadas por

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (2.22)$$

$$B \mp \sqrt{2U} = 0. \quad (2.23)$$

A energia mínima resultante, também denominada energia BPS do sistema, é então expressa como

$$E_{BPS} = \pm \int d^2x \left(\sqrt{2U} + e|\phi|^2 \right) B. \quad (2.24)$$

Contudo, ainda resta resolver a integral no lado direito da eq. (2.24). Para tanto, escolhamos apropriadamente o termo entre parênteses como sendo uma constante de modo tal que o potencial $U(|\phi|)$ seja

$$U(|\phi|) = \frac{e^2}{2} (v^2 - |\phi|^2)^2. \quad (2.25)$$

Assim, a energia BPS resulta ser proporcional ao fluxo magnético, sendo escrita na forma

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2x B = \pm ev^2 \Phi_B. \quad (2.26)$$

Uma vez fixado o potencial, pode-se reescrever as equações BPS (2.22) e (2.23) como

$$D_1\phi = \mp iD_2\phi, \quad (2.27)$$

$$B = \pm e (v^2 - |\phi|^2). \quad (2.28)$$

2.3 O ansatz de vórtices axialmente simétricos

Uma vez que vórtices são estruturas planares, dotadas de simetria rotacional, torna-se conveniente fazermos o uso de coordenadas polares. Para tanto, introduziremos o ansatz de soluções estáticas e axialmente simétricas, dado por

$$\phi(r, \theta) = vg(r) e^{in\theta}, \quad A_{\theta}(r) = -\frac{1}{er} [a(r) - n], \quad A_r(r, \theta) = 0, \quad (2.29)$$

onde r e θ são coordenadas polares e n representa a vorticidade característica do vórtice². No que diz a respeito à vorticidade, vale mencionar que este deve ser um inteiro não nulo, levando-nos a concluir, como veremos mais adiante, que o fluxo magnético do vórtice é quantizando. Tal asserção emerge do fato de que o campo de Higgs deve ser univocamente determinado, ou seja, exigindo-se que o campo de Higgs seja periódico,

$$\phi(r, \theta) = \phi(r, \theta + 2\pi). \quad (2.30)$$

² Esse ansatz é bastante similar ao que foi proposto por Abrikosov ao examinar a transformação de fase em supercondutores do tipo II [3].

As funções $g(r)$ e $a(r)$ são adimensionais e regulares tanto na origem quanto no infinito, satisfazendo as seguintes condições de contorno

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n, \quad (2.31)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0. \quad (2.32)$$

Utilizando o ansatz, o campo magnético, dado por $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$, pode ser escrito como

$$B = -\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = -\frac{a'}{er}. \quad (2.33)$$

Por outro lado, se procedermos do mesmo com as equações BPS (2.27) e (2.28) estas serão expressas como

$$\frac{dg}{dr} = \pm \frac{ag}{r}, \quad (2.34)$$

$$-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} = \pm ev^2 (1 - g^2) = B. \quad (2.35)$$

Já a densidade de energia BPS torna-se

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \left(\frac{ag}{r} \right)^2. \quad (2.36)$$

A partir da eq. (2.33), determina-se o fluxo magnético, que resulta em

$$\Phi_B = \int d^2x B = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r dr d\theta \left(-\frac{1}{er} \frac{da}{dr} \right) = \frac{2\pi n}{e}, \quad (2.37)$$

onde, após a quadratura, se utilizou as condições de contorno (2.31) e (2.32) para a função $a(r)$. Nota-se então, que a energia dos estados BPS são proporcionais a vorticidade, sendo, portanto

$$E_{BPS} = 2\pi v^2 |n|. \quad (2.38)$$

2.4 Análise das condições de contorno

Antes de prosseguirmos com a resolução numérica das eqs. (2.35) e (2.34), convém verificarmos o comportamento assintótico das condições de contorno (2.31) e (2.32) em $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Para o comportamento assintótico na origem, o método de séries de potências revela-se adequado. A implementação deste método pode ser feita propondo-se que as séries para $a(r)$ e $g(r)$ sejam expressas na forma

$$a(r) = n - \sum_{j=1}^{\infty} A_j r^j, \quad g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j r^j, \quad (2.39)$$

onde os primeiros termos ($j = 0$) concordam com as condições (2.31). Substituindo (2.39) nas (2.35) e (2.34), conseguimos expressar a série, cujo os primeiros termos, para $n > 0$, são

$$a(r) = n - \frac{1}{2} e^2 v^2 r^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2 v^2 (G_n)^2}{n+1} r^{2(n+1)} - \dots, \quad (2.40)$$

$$g(r) = (G_n) r^n - \frac{1}{4} e^2 v^2 (G_n) r^{n+2} + \frac{1}{32} e^4 v^4 (G_n) r^{n+4} - \dots. \quad (2.41)$$

Como se nota, para $r \rightarrow 0$ todos os termos da série tendem a zero, exceto os primeiros, mostrando, portanto, que as condições de contorno são de fato compatíveis com as equações BPS.

Agora, vejamos como se comportam as funções $a(r)$ e $g(r)$ para $r \rightarrow \infty$. Para tanto, propõe-se que as funções $a(r)$ e $g(r)$ assumam configurações aproximadas em torno das condições de contorno (2.32), as quais são expressas como

$$a(r) \simeq A(r), \quad g(r) \simeq 1 - G(r), \quad (2.42)$$

onde $A(r)$ e $G(r)$ são funções analíticas que satisfazem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0. \quad (2.43)$$

Quando substituimos as eqs. (2.42) nas equações BPS (2.35) e (2.34), obtemos

$$\frac{dG}{dr} + \frac{A(r)}{r} = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + 2e^2 v^2 G(r) = 0, \quad (2.45)$$

onde foram consideradas somente as contribuições lineares (ou de primeira ordem). As eqs. (2.44) e (2.45) podem ser desacopladas e resolvidas analiticamente e suas soluções mais gerais são

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{2}ev} \left[C_1 K_0(\sqrt{2}evr) - C_2 I_0(\sqrt{2}evr) \right], \quad (2.46)$$

$$A(r) = C_3 r K_1(\sqrt{2}evr) + C_4 r I_1(\sqrt{2}evr), \quad (2.47)$$

onde I_0 , I_1 , K_0 e K_1 são funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo, respectivamente, cuja ordem são zero e um. O comportamento típico dessas funções é mostrado na [Figura 1](#), onde se nota que, para $r \rightarrow \infty$, as funções I_0 e I_1 divergem enquanto as funções K_0 e K_1 convergem a zero. A imposição das condições (2.43) nos conduz a escolha $C_2 = C_4 = 0$, de modo que, agora, $G(r)$ e $A(r)$ dependem apenas das funções K_0 e K_1 . Como estamos lidando com soluções para $r \rightarrow \infty$, podemos considerar a expansão assintótica dessas duas funções, que são

$$K_0(\sqrt{2}evr) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{4ev}} \frac{e^{-\sqrt{2}evr}}{\sqrt{r}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{2^6(2ev)^3}} \frac{e^{-\sqrt{2}evr}}{\sqrt{r^3}} + O(r^{-\frac{5}{2}}),$$

$$K_1(\sqrt{2}evr) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{4ev}} \frac{e^{-\sqrt{2}evr}}{\sqrt{r}} + \sqrt{\frac{9\sqrt{2}\pi}{2^8(2ev)^3}} \frac{e^{-\sqrt{2}evr}}{\sqrt{r^3}} + O(r^{-\frac{5}{2}}).$$

Desse modo, as funções $G(r)$ e $A(r)$ podem ser lidas como

$$G(r) = C_1 \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{(2ev)^3}} \frac{e^{-\sqrt{2}evr}}{\sqrt{r}} + O(r^{-\frac{3}{2}}), \quad (2.48)$$

$$A(r) = C_3 \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{4ev}} e^{-\sqrt{2}evr} \sqrt{r} + O(r^{-\frac{3}{2}}), \quad (2.49)$$

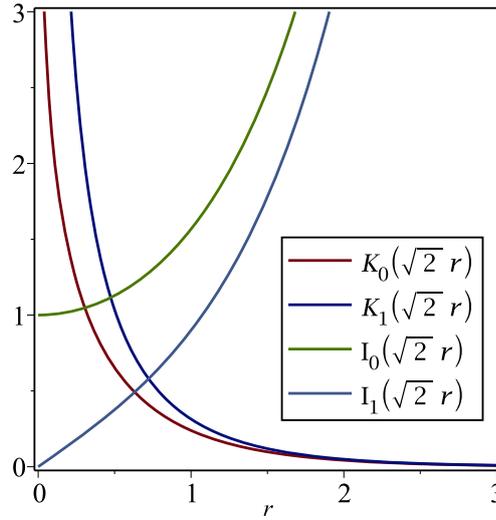


Figura 1 – Comportamento das funções Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo de ordem zero e um. Por simplicidade escolheu-se $e = v = 1$.

de onde finalmente concluímos que $a(r)$ e $g(r)$ são

$$a(r) \simeq C_3 \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{4ev}} e^{-\sqrt{2}evr} \sqrt{r} + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (2.50)$$

$$g(r) \simeq 1 - C_1 \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{(2ev)^3}} \frac{e^{-\sqrt{2}evr}}{\sqrt{r}} + O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (2.51)$$

onde símbolo \simeq é lido como “*assintoticamente igual a*”. Vê-se então que, no infinito as condições de contorno (2.32) são de fato corretas. Outro fato interessante é que o comportamento apresentado na eqs. (2.48) é o mesmo encontrado nas soluções de vórtices de [Abrikosov, Nielsen e Olesen](#).

Por fim, vale mencionar que o argumento das funções de Bessel modificadas do segundo tipo, K_0 e K_1 , representa a escala de massa dos bósons no modelo de Maxwell-Higgs, que no limite de [Bogomol’nyi](#) é dada por

$$m_G = m_H = \sqrt{2}ev. \quad (2.52)$$

2.5 Soluções numéricas

Abaixo, constam soluções obtidas via o tratamento numérico das equações (2.35) e (2.34), onde se levou em consideração as condições de contorno (2.31) e (2.32). Os resultados são apresentados para configurações BPS com vorticidade $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$ e $n = 10$. Por simplicidade, utilizou-se $e = v = 1$.

O gráfico da [Figura 2a](#) mostra as soluções obtidas para os perfis de $g(r)$. Como se nota, próximo da origem os perfis do Higgs são mais estreitos para menores valores de n . Isto

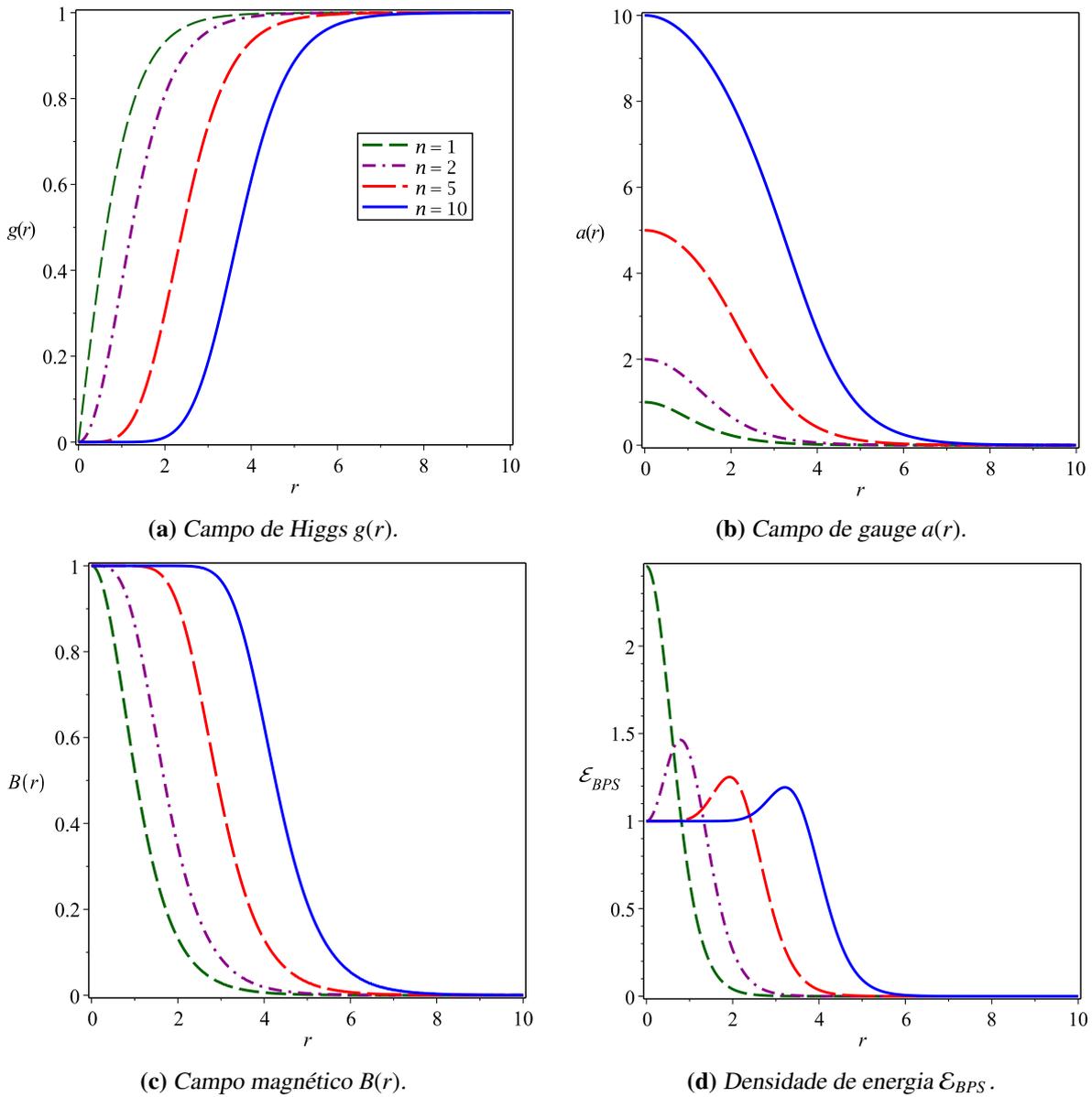


Figura 2 – Soluções numéricas para vórtices no modelo Maxwell-Higgs. Por simplicidade escolheu-se $e = v = 1$.

implica, por exemplo, que para um r fixo $g(r)$ tem maior intensidade para $n = 1$ do que em $n = 2$. Além disso, os perfis convergem ao estado de vácuo da teoria mais lentamente para maiores valores de n .

A [Figura 2b](#) mostra as soluções para os perfis $a(r)$. Os perfis de $a(r)$, a exemplo dos perfis de $g(r)$, são mais estreitos para menores valores de n . Contudo, para algum r fixo, vemos que $a(r)$ tem intensidade maior para maiores valores de n .

Os perfis das soluções para o campo magnético é mostrado na [Figura 2c](#), onde se nota que este alcança o seu valor máximo (ev^2) na origem, sendo este comportamento independente do valor de n . O campo magnético é bem localizado, decaindo em intensidade e indo a zero à medida que nos afastamos da origem. Para valores cada vez maiores de n , o campo magnético

abarca uma área maior, aumentando assim o fluxo magnético.

Por fim, no gráfico da [Figura 2d](#) são apresentados os perfis das soluções da densidade de energia. Vê-se que no caso em que $n = 1$, a densidade de energia apresenta um comportamento distinto, onde atinge seu valor máximo ainda na origem, a partir do qual decresce até tornar-se nula à medida que nos afastamos. Por outro lado, para soluções em que $n > 1$, a densidade de energia apresenta um mesmo valor finito na origem, atingindo seu valor máximo em alguma posição $r = r_0$ (o valor de r_0 muda para cada $n > 1$), decaindo a zero a medida que nos distanciamos do núcleo, tendo, portanto, a forma de um “*anel*”. A densidade de energia se alarga à medida que n aumenta e a energia total é incrementada em múltiplos do valor $2\pi v^2$.

3 Vórtices BPS no modelo Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo quebrando as simetrias de Lorentz e CPT

Na década de 1980, o termo topológico de Chern-Simons (CS) passou a desempenhar papel importante nas teorias de gauge. Dentre os muitos trabalhos que versavam sobre o tema, alguns mostraram que o termo CS pode ser induzido pelas teorias de gauge 4-dimensionais à temperatura finita [73–75], tornando-se dominante a altas temperaturas. Esse fato levou os físicos indianos [Paul e Khare \(1987\)](#) a se perguntarem se haveria algum outro mecanismo que pudesse gerar o termo CS. Em particular, os pesquisadores queriam saber se tal termo poderia ser gerado pelo mecanismo de Higgs. Para alcançar esse objetivo eles propuseram uma generalização do modelo Higgs abeliano [24] 1+2-dimensional na qual a densidade lagrangiana era dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(1 + g^2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|\mathcal{D}_\mu|^2 - c^4\left(|\phi|^2 - \frac{1}{2}\frac{c_2}{c_4}\right)^2, \quad (3.1)$$

onde a derivada covariante

$$\mathcal{D}^\mu\phi = \partial^\mu\phi + ieA^\mu\phi + i\frac{g}{2|\phi|}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}\phi, \quad (3.2)$$

é, agora, dotada de um acoplamento não-mínimo entre o campo escalar e o tensor eletromagnético. [Paul e Khare](#), não apenas mostraram que o mecanismo de Higgs gerava o termo CS, como também provia um termo de massa para o campo de gauge. Além disso, eles também mostraram que o modelo admite vórtices neutros de energia finita em cada setor topologicamente não trivial, o que contrasta com os vórtices carregados obtidos no modelo de Chern-Simons-Higgs (CSH). Eles não conseguiram entender porque tal diferença ocorre. Apesar de serem neutros, os vórtices obtidos possuem tanto densidade de carga como campo elétrico não nulos.

Em uma outra proposta, [Torres \(1992\)](#) considerou uma generalização do modelo CSH abeliano [26] bastante similar ao de [Paul e Khare](#), exceto pela presença de um termo CS. O modelo proposto por [Torres](#) é dado pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho F_{\nu\rho} + \frac{1}{2}|\mathcal{D}_\mu|^2 - V(|\phi|), \quad (3.3)$$

onde a derivada covariante não-mínima é

$$\mathcal{D}^\mu\phi = \partial^\mu\phi - ieA^\mu\phi - i\frac{g}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}\phi, \quad (3.4)$$

e $V(|\phi|)$ um potencial da forma

$$V(|\phi|) = a_2|\phi|^2 + a_4|\phi|^4 + a_6|\phi|^6.$$

O acoplamento não-mínimo de [Torres](#) foi motivado pelo fato de que o acoplamento Pauli para férmions em (1+2)-dimensões, escrito na forma $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi F_{\nu\alpha}$, pode ser incorporado

em uma derivada covariante sem fazer qualquer referencia aos graus de liberdade do spin [76,77]. Neste tipo de acoplamento, a constante g é interpretada como um momento magnético anômalo. Torres supôs que o mínimo da quebra espontânea de simetria para o potencial $V(|\phi|)$ é dado por $|\phi| = v$ e implementou o mecanismo de quebra escrevendo o campo escalar na forma $\phi = (v + \eta) e^{i\alpha}$. O mecanismo não apenas gera o termo de massa para o campo de gauge, como também provê um termo tipo CS, tal como o modelo de Paul e Khare. Com este modelo, Torres ainda obteve soluções de vórtices carregados, não topológicos e de energia finita, tanto na abordagem das equações de segunda ordem quanto no limite de Bogomol'nyi.

Uma generalização do modelo de Torres foi proposta por Ghosh (1994) no qual uma função dielétrica, $G(|\phi|)$, foi multiplicada pelo termo de Maxwell e pela contribuição não-mínima da derivada covariante [27]. Segundo Ghosh, a modificação no termo cinético de Maxwell pode ser visto como uma ação efetiva para um sistema descrito pela função dielétrica $G(|\phi|)$, tal como em modelos de *sóliton bag* de quarks e glúons [78–80] e em teorias supersimétricas com um grupo compacto [81]. Por outro lado, no contexto de vórtices, o acoplamento não-mínimo é interessante devido a existência de estados Bogomol'nyi para uma forma mais geral do potencial escalar. O modelo estudado por Ghosh é definido pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G(|\phi|)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho F_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\left|\partial^\mu\phi - ieA^\mu\phi - i\frac{g}{4}G(|\phi|)\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}\phi\right|^2 - V(|\phi|). \quad (3.5)$$

Ele mostrou que no limite de Bogomol'nyi, o modelo admite soluções de vórtices estacionários carregados, de energia mínima, tanto topológicos quanto não topológicos, para uma certa classe de funções dielétricas. Os vórtices topológicos de Ghosh possuem fluxo magnético, carga e momento angular que não são necessariamente quantizados, muito embora a energia seja. De outro modo, os vórtices não topológicos possuem energia, fluxo magnético, carga e momento angular que são necessariamente não quantizados. Ghosh ainda estudou o limite não relativístico e obteve soluções estáticas de sólitons auto-duais.

Mais recentemente (2004), Chandelier *et al.* [31] estudaram dois modelo MCS acoplado a um escalar massivo não relativístico [31]. Os modelos foram classificados como tipo I e tipo II. O modelo tipo I considerava um acoplamento mínimo usual suplementado por um campo magnético dependente de acoplamento tipo Zeeman. O modelo tipo II envolvia um acoplamento não-mínimo no setor da matéria não relativística. Esse modelo é regido pela seguinte ação

$$S = \int d^3x \left[-\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\eta}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu F^{\nu\rho} + i\phi^\dagger \mathcal{D}_0\phi - \frac{1}{2m}|\mathcal{D}_i\phi|^2 - V(|\phi|) - A_0J_0 \right],$$

onde $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iA_\mu - i\kappa F_\mu$ e $J_0 > 0$ é uma carga de fundo externa. Segundo os autores, a componente tipo-tempo do termo envolvendo κ é interpretada como um acoplamento dipolo magnético (acoplamento Zeeman), enquanto que a componente tipo espaço gera uma acoplamento dependente do campo elétrico. Essas interpretações são baseadas nas propostas de um acoplamento não mínimo vistas como alternativa nas descrições de objetivos aniônicos compostos [76,77,82,83]. Seguindo este modelo, os autores mostraram que vórtices não saturam no estado fundamental, a menos que um potencial não linear seja introduzido.

Como visto acima, modelos com acoplamento não-mínimo tem sido discutidos no âmbito das teorias de gauge em $(1 + 2)$ -dimensões, não apenas no setor de férmions, onde o acoplamento Pauli pode ser incorporado a uma derivada covariante generalizada. Acoplamentos não-mínimos também são estudados no setor de bósons (campo escalar complexo), onde configurações de vórtices com energia finita tem sido encontrados. Em todos os modelos estudados, o acoplamento não-mínimo é acompanhado do tensor dual $\epsilon^{\mu\alpha\rho}F_{\alpha\rho}$, não havendo, portanto, investigações acerca dos efeitos de um possível acoplamento não-mínimo dotado do tensor $F_{\mu\nu}$, em vez do seu dual.

Assim posto, nossa investigação, consiste em explorar novas formas de acoplamentos não-mínimos, no contexto da quebra das simetrias de Lorentz e CPT, e implementá-las no estudo de novas configurações de vórtices BPS, estáveis e de energia finita.

3.1 O modelo de Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo

O modelo Maxwell-Higgs dotado de um acoplamento não mínimo quebrando a simetria de Lorentz e de CPT é governado pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu\phi)^*(\mathcal{D}^\mu\phi) - U(|\phi|, \partial_\mu|\phi|), \quad (3.6)$$

onde

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi + iF_{\mu\rho}\xi^\rho\phi, \quad (3.7)$$

é uma derivada covariante não mínima, ξ^ν é um vetor, denominado campo de fundo, com dimensão de massa $-1/2$, responsável pela violação da simetria de Lorentz e da simetria CPT; a interação $U(|\phi|, \partial_\mu|\phi|)$ será determinada explicitamente pelo formalismo BPS, a ser desenvolvido nas próximas seções.

As equações de movimento do campo de gauge e do campo escalar, que emergem da densidade lagrangiana (3.6), são

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e\mathcal{J}^\mu + \partial_\nu(\xi^\mu\mathcal{J}^\nu - \xi^\nu\mathcal{J}^\mu), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi = \partial_\mu\frac{\partial U}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} - \frac{\partial U}{\partial\phi^*}, \quad (3.9)$$

respectivamente. A densidade de corrente, \mathcal{J}^μ , é definida por

$$\mathcal{J}^\mu = i[\phi(\mathcal{D}^\mu\phi)^* - \phi^*(\mathcal{D}^\mu\phi)] = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) - 2eA^\mu|\phi|^2 + 2F^{\mu\rho}\xi_\rho|\phi|^2. \quad (3.10)$$

A conservação da densidade de corrente, $\partial_\mu\mathcal{J}^\mu = 0$, é facilmente verificada aplicando ∂_μ sobre a eq. (3.8).

Desse modo, a eq. (3.8) pode ser reescrita como

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e\mathcal{J}^\mu - \xi^\nu\partial_\nu\mathcal{J}^\mu.$$

Uma vez que estamos interessados em configurações estáticas de vórtices, devemos escrever as equações de Maxwell do modelo no regime estacionário. Desse modo, a lei de Gauss estacionária é dada por

$$\partial_i \partial_i A_0 + \xi_i \partial_i \mathcal{J}_0 = -e \mathcal{J}_0, \quad (3.11)$$

com \mathcal{J}_0 estacionário dependendo explicitamente de A_0 ,

$$\mathcal{J}_0 = -2eA_0 |\phi|^2 + 2\xi_j (\partial_j A_0) |\phi|^2. \quad (3.12)$$

onde se vê que a condição $A_0 = 0$ satisfaz a lei de Gauss identicamente. Portanto, no regime estacionário teremos soluções eletricamente neutras. Diante dessa assertiva, a lei de Ampère estacionária apresenta-se na forma

$$\epsilon_{kj} \partial_j B - \xi_j \partial_j \mathcal{J}_k = e \mathcal{J}_k, \quad (3.13)$$

onde \mathcal{J}_k estacionário é lido como

$$\mathcal{J}_k = i(\phi \partial_k \phi^* - \phi^* \partial_k \phi) - 2eA_k |\phi|^2 - 2\epsilon_{kl} \xi_l B |\phi|^2. \quad (3.14)$$

Por outro lado, a equação estacionária do campo de Higgs torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \phi^*} - \partial_j \frac{\partial U}{\partial (\partial_j \phi^*)} &= \partial_j \partial_j \phi - ie(\partial_j A_j) \phi - 2ieA_j \partial_j \phi - e^2 A_j A_j \phi - i\epsilon_{jk} \xi_k (\partial_j B) \phi \\ &\quad - 2i\epsilon_{jk} \xi_k B \partial_j \phi - 2e\epsilon_{jk} \xi_k A_j B \phi - (\xi_j B)^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2 A densidade de energia e as equações BPS

A densidade de energia do modelo (3.6) é escrita na forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (F_{0k})^2 + \frac{1}{4} (F_{jk})^2 + |\mathcal{D}_0 \phi|^2 + |\mathcal{D}_k \phi|^2 + U + \xi_0 F_{0k} \mathcal{J}_k. \quad (3.16)$$

Ao se fazer uma rápida inspeção na densidade de energia (3.16), percebe-se que esta será definida positiva quando $\xi_0 = 0$ e $U \geq 0$, já que os quatro primeiros termos são não negativos. Além do mais, estamos buscando configurações que descrevam vórtices, que são estruturas estáticas. Portanto, estamos interessados nos valores da energia para os quais o cenário se apresente no regime estacionário, onde, como já foi visto, vale a condição $A_0 = 0$. Assim sendo, a densidade de energia estacionária do sistema é dada por

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2} B^2 + |\mathcal{D}_k \phi|^2 + U \right). \quad (3.17)$$

Agora, tendo a energia estacionária em mãos, implementamos o método BPS com o intuito de encontrar as equações BPS ou auto-duais e determinar a forma explícita da interação

U . Para esse propósito, fazemos o uso das seguintes identidades¹

$$\frac{1}{2}B^2 + U = \frac{1}{2}(B \mp \sqrt{2U})^2 \pm \sqrt{2U}B, \quad (3.18)$$

$$|\mathcal{D}_k\phi|^2 = |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 \pm eB|\phi|^2 \pm B\xi_j\partial_j|\phi|^2 \pm \partial_j\left(\frac{1}{2}\epsilon_{jk}\mathcal{J}_k - \xi_jB|\phi|^2\right), \quad (3.19)$$

onde $\mathcal{D}_\pm\phi$ é definida como sendo

$$\mathcal{D}_\pm\phi = \mathcal{D}_1\phi \pm i\mathcal{D}_2\phi. \quad (3.20)$$

Substituindo-se as expressões (3.18) e (3.19) em (3.17), a energia torna-se

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(B \mp \sqrt{2U})^2 + |\mathcal{D}_\pm\phi|^2 \pm B(\sqrt{2U} + e|\phi|^2 + \xi_j\partial_j|\phi|^2) \pm \partial_k\mathbb{J}_k \right], \quad (3.21)$$

onde definimos

$$\mathbb{J}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ki}\mathcal{J}_i - \xi_kB|\phi|^2. \quad (3.22)$$

Conforme a prescrição de [Bogomol'nyi](#) [19], o mínimo da energia será atingido se os termos quadráticos forem nulos, ou seja, devemos impor

$$\mathcal{D}_\pm\phi = 0, \quad (3.23)$$

$$B = \pm\sqrt{2U}. \quad (3.24)$$

Essas representam as equações BPS do modelo de Maxwell-Higgs não-mínimo. Usando ambas as equações na eq. (3.21), obtemos a energia BPS do sistema

$$E_{BPS} = \pm \int d^2x \left[B(\sqrt{2U} + e|\phi|^2 + \xi_j\partial_j|\phi|^2) + \partial_k\mathbb{J}_k \right]. \quad (3.25)$$

Neste ponto, observamos que o integrando poderá ser expresso como uma soma composta do campo magnético e de uma derivada total sempre que a interação U tiver a seguinte forma

$$U = \frac{1}{2}(ev^2 - e|\phi|^2 - \xi_j\partial_j|\phi|^2)^2. \quad (3.26)$$

Com isto, a energia BPS torna-se

$$E_{BPS} = \pm \int d^2x \left[ev^2B + \partial_k\mathbb{J}_k \right]. \quad (3.27)$$

A integração pode ser realizada, a escolha de condições de contorno apropriadas (como veremos na próxima seção) garantem que a derivada total não contribui para a energia total, então obtemos que

$$E_{BPS} = \pm ev^2 \int d^2x B = \pm ev^2\Phi, \quad (3.28)$$

a energia BPS é proporcional ao fluxo do campo magnético.

¹ No [Apêndice A](#) apresentamos em detalhes os cálculos que conduzem a eq. (3.19)

Por fim, tendo fixado a interação, vemos que as equações BPS, (3.23) e (3.24), podem ser escritas na forma

$$\mathcal{D}_\pm \phi = 0, \quad (3.29)$$

$$B = \pm \left(ev^2 - e|\phi|^2 - \xi_j \partial_j |\phi|^2 \right). \quad (3.30)$$

3.3 A projeção no ansatz de soluções axialmente simétricas

Na seção 2.3 introduzimos na eq. (2.29) o ansatz de soluções axialmente simétricas para configurações estáticas de vórtices dadas por

$$\phi(r, \theta) = vg(r)e^{in\theta}, \quad A_\theta(r) = -\frac{1}{er} [a(r) - n], \quad A_r(r, \theta) = 0,$$

onde, como antes, n é um inteiro não nulo.

As funções $g(r)$ e $a(r)$ são bem comportadas, satisfazendo as condições de contorno estabelecidas em (2.31) e (2.32)

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = n, \quad (3.31)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0, \quad (3.32)$$

que são apropriadas para prover configurações de energia finita. Mais adiante, na seção (3.4) mostraremos explicitamente a compatibilidade destas com as equações BPS.

Usando o ansatz acima, a divergência da densidade de corrente estacionaria é

$$\partial_k \mathcal{J}_k = -2v^2 \xi_\theta \frac{1}{r} \partial_r (rg^2 B), \quad (3.33)$$

a exigência de que seja conservada conduz à condição adicional $\xi_\theta = 0$.

Logo, a densidade de energia BPS (3.27), em coordenadas polares, é dada por

$$\mathcal{E}_{BPS} = B^2 + 2v^2 \left(\frac{ag}{r} + \xi_r g B \right)^2, \quad (3.34)$$

sendo esta positiva definida para todos os valores do parâmetro de violação de Lorentz, ξ_r .

Além do mais, notamos que o último termo no integrando da eq. (3.27) pode ser expresso como

$$\partial_j \left(\frac{1}{2} \epsilon_{jk} \mathcal{J}_k - \xi_j B |\phi|^2 \right) = v^2 \frac{1}{r} \partial_r (ag^2). \quad (3.35)$$

e cuja integração em todo o espaço, usando as condições de contorno (3.31) e (3.32)

$$\int d^2x \partial_j \left(\frac{1}{2} \epsilon_{jk} \mathcal{J}_k - \xi_j B |\phi|^2 \right) = v^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \partial_r (ag^2) r dr d\theta = 2\pi v^2 \int_0^\infty \partial_r (ag^2) dr, \quad (3.36)$$

resulta nula. Este resultado confirma a assertiva da seção anterior, quando dissemos que sob condições de contorno apropriadas, a derivada total se anulava.

O fluxo magnético continua sendo dado como na eq. (2.37), $\Phi_B = 2\pi n/e$, e, em vista disso, a energia BPS (3.28) pode ainda ser escrita como

$$E_{BPS} = 2\pi v^2 |n|. \quad (3.37)$$

Portanto, assim como no modelo MH mínimo, a energia BPS é quantizada, sendo proporcional a vorticidade n .

A projeção das equações BPS (3.29) e (3.30) no ansatz fornece

$$g' = \pm g \left(\frac{a}{r} - \xi_r \frac{a'}{er} \right), \quad (3.38)$$

$$B = \pm ev^2 (1 - g^2) \mp 2v^2 \xi_r g g'. \quad (3.39)$$

Ambas as equações resolvem as equações de Euler-Lagrange do modelo (3.6) com a interação U dada pela eq. (3.26). A fim de efetuar essa verificação explicitamente, primeiro expressamos a lei Ampère (3.13) em sua forma axialmente simétrica,

$$\left[B + 2\xi_r v^2 g^2 \left(\frac{a}{r} + \xi_r B \right) \right]' = -2ev^2 g^2 \left(\frac{a}{r} + \xi_r B \right), \quad (3.40)$$

que após o uso da eq. (3.38) pode ser integrada, tornado-se (3.39). Isto posto, verifica-se que a eq. (3.38) resolve a lei de Ampère. Em seguida, projetamos no ansatz a equação do campo de Higgs (3.15), que agora é dada por

$$\begin{aligned} 0 = & g'' \left(1 + 2(\xi_r)^2 v^2 g^2 \right) + \frac{g'}{r} \left(1 + 2(\xi_r)^2 v^2 g^2 \right) - \xi_r ev^2 \frac{g}{r} (1 - g^2) \\ & - g \left(\frac{a}{r} + \xi_r B \right)^2 + e^2 v^2 g (1 - g^2) + 2(\xi_r)^2 v^2 g (g')^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Usando a segunda equação BPS (3.38), a eq. (3.41) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 = & g'' + \frac{g'}{r} - g \left(\frac{a}{r} + \xi_r B \right)^2 \mp \xi_r \frac{g}{r} B \pm egB \mp \xi_r g B' \\ 0 = & \left[g' \mp g \left(\frac{a}{r} + \xi_r B \right) \right]' , \end{aligned} \quad (3.42)$$

que simplesmente é a derivada da eq. (3.38). Desta maneira, mostramos explicitamente que as equações auto-duais resolvem as equações de movimento de Euler-Lagrange.

Antes de procedemos com a análise numérica, expressamos as equações BPS na forma adimensional. Para tanto, fazemos as redefinições de escala $\rho \rightarrow evr$ e $\delta \rightarrow v\xi_r$, os quais conduzem a

$$\begin{aligned} g(r) & \rightarrow g(\rho), & B(r) & \rightarrow ev^2 B(\rho), \\ a(r) & \rightarrow a(\rho), & \mathcal{E}_{BPS}(r) & \rightarrow e^2 v^4 \mathcal{E}_{BPS}(\rho), \end{aligned}$$

onde o parâmetro δ regerá as contribuições da violação de Lorentz.

As equações BPS adimensionais são então escritas como,

$$g' = \pm g \left(\frac{a}{\rho} - \delta \frac{a'}{\rho} \right), \quad (3.43)$$

$$B(\rho) = -\frac{a'}{\rho} = \pm (1 - g^2) \mp 2\delta g g', \quad (3.44)$$

e a densidade de energia BPS adimensional é dada por

$$\mathcal{E}_{BPS}(\rho) = B^2 + 2 \left(\frac{ag}{\rho} + \delta g B \right)^2. \quad (3.45)$$

3.4 A análise das condições de contorno

Iniciamos a discussão a respeito do comportamento das soluções das eqs. (3.43) e (3.44) quando $\rho \rightarrow 0$. Como estamos em busca de soluções bem comportadas, expandimos os perfis dos campos em série de potências em torno das condições de contorno dadas pela eq. (3.31) e (3.32),

$$g(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j \rho^j, \quad a(\rho) = n - \sum_{j=1}^{\infty} A_j \rho^j, \quad (3.46)$$

e após substituímos as séries acima nas eqs. (3.43)-(3.44), encontramos os seguintes primeiros termos

$$g(\rho) = G_n \rho^n + G_n \delta \rho^{n+1} + \dots, \quad (3.47)$$

$$a(\rho) = n - \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{2n}{2n+1} \delta G_n^2 \rho^{2n+1} + \dots, \quad (3.48)$$

onde se nota que ambas as expansões confirmam as condições de contorno impostas em (3.31).

Antes de estudar o comportamentos das soluções que satisfazem as condições de contorno (3.32), reescrevemos as equações BPS em uma forma conveniente, por meio da simples substituição da eq. (3.43) na (3.44), e vice-versa, o que conduz a

$$(1 + 2\delta^2 g^2) \frac{dg}{d\rho} = \pm \frac{ag}{\rho} + \delta g (1 - g^2), \quad (3.49)$$

$$(1 + 2\delta^2 g^2) \frac{1}{\rho} \frac{da}{d\rho} = \mp (1 - g^2) + 2\delta \frac{ag^2}{\rho}. \quad (3.50)$$

Assim como foi feito para o caso Maxwell-Higgs usual, propõe-se que as funções $a(\rho)$ e $g(\rho)$ assumam configurações aproximadas em torno das condições de contorno de tal modo que

$$a(\rho) \simeq A(\rho), \quad g(\rho) \simeq 1 - G(\rho), \quad (3.51)$$

onde, como antes, $A(\rho)$ e $G(\rho)$ são funções analíticas que satisfazem

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} G(\rho) = 0. \quad (3.52)$$

Substituindo as eqs. (3.51) nas (3.49) e (3.50), e considerando somente as contribuições em primeira ordem, encontramos

$$(2\delta^2 + 1) \frac{dG}{d\rho} + \frac{A(\rho)}{\rho} + 2\delta G(\rho) = 0, \quad (3.53)$$

$$(2\delta^2 + 1) \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} + 2G(\rho) - 2 \frac{\delta A(\rho)}{\rho} = 0. \quad (3.54)$$

Uma vez que buscamos perfis para os campos cujo comportamento para $\rho \rightarrow \infty$ seja similar aos de [Abrikosov](#), [Nielsen e Olesen](#), propomos que

$$\begin{aligned} G(\rho) &\sim \rho^{-1/2} e^{-\beta\rho}, \\ A(\rho) &\sim \rho^{1/2} e^{-\beta\rho}, \end{aligned}$$

que substituídos nas eqs. (3.53) e (3.54), prover um sistema de equações lineares que pode ser resolvido de modo consistente se, e somente se, β é dado por

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{1 + 2\delta^2}}, \quad (3.55)$$

onde se nota que a escala de massa do modelo Maxwell-Higgs com acoplamento mínimo é recuperada quando $\delta = 0$, ou seja, quando o parâmetro de violação de Lorentz ξ_r for nulo.

3.5 Soluções Numéricas

As soluções numéricas das equações BPS adimensionais (3.43) e (3.44) são apresentadas nos gráficos abaixo, que mostram o comportamento dos perfis dos campos de Higgs, gauge, magnético e da densidade de energia BPS para vários valores da vorticidade n e do parâmetro de violação da simetria de Lorentz δ .

3.5.1 Gráficos das soluções obtidas para $n = 1$ e $-1 \leq \delta \leq 1$

O gráfico da [Figura 3](#) compara o comportamento dos perfis do campo de Higgs para $n = 1$ e vários valores de δ . Perto da origem, observamos que para valores cada vez menores de δ , com $\delta < 0$, os perfis de $g(\rho)$ tornam-se mais estreitos, quando comparados ao perfil do modelo de Maxwell-Higgs. Isso implica, por exemplo, que o perfil de $g(\rho)$ para $\delta = -1$ é mais estreito do que para $\delta = -0.25$. Por outro lado, quando $\delta > 0$, os perfis de $g(\rho)$ são mais largos, em relação ao do modelo de MH, conforme os valores de δ se incrementam.

De outro modo, longe da origem, os perfis em que $|\delta|$ é cada vez maior, convergem mais lentamente ao estado de vácuo, ao passo que para valores cada vez menores de $|\delta|$ os perfis convergem mais rapidamente, em concordância com a escala de massa definida em (3.55). Obviamente, todos os perfis de $g(\rho)$ convergem ao estado de vácuo mais lentamente que o correspondente do modelo de Maxwell-Higgs ($\delta = 0$).

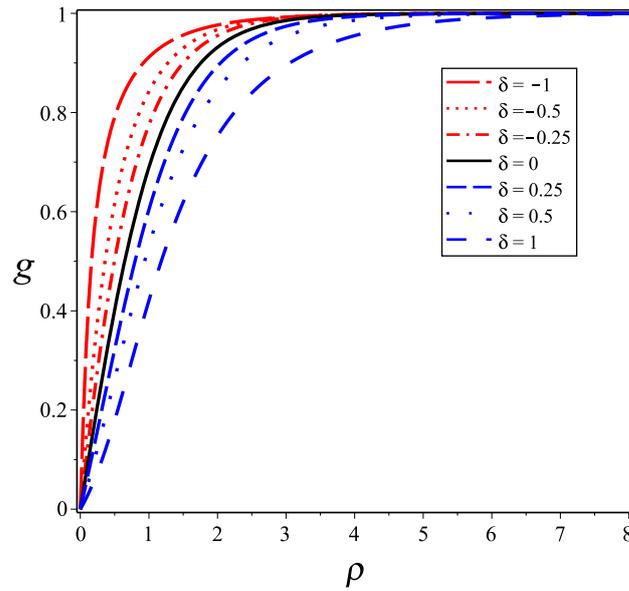


Figura 3 – O perfil do campo de Higgs $g(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas negras ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs, e as linhas azuis para $\delta > 0$.

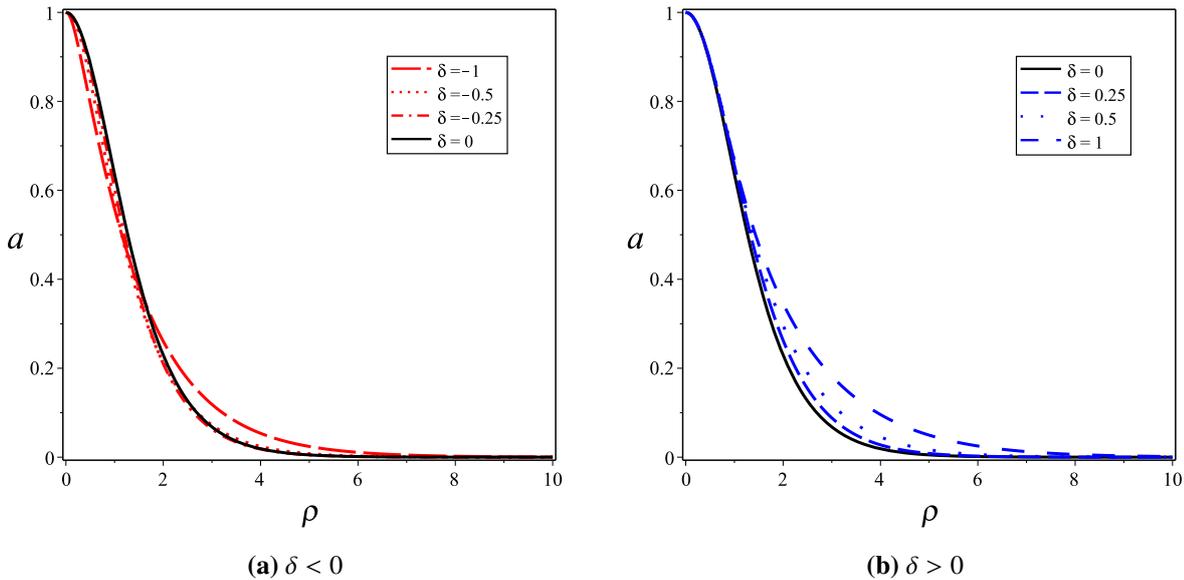


Figura 4 – O perfil do campo de gauge $a(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas pretas ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis para $\delta > 0$.

A [Figura 4](#) mostra os perfis do potencial vetor $a(\rho)$ para $n = 1$. Para $\delta < 0$, [Figura 4a](#), perto da origem, os perfis são mais estreitos conforme $|\delta| \rightarrow \infty$. Contudo, a uma certa distância da origem, os perfis cruzam aquele do MH e ficam mais largos de acordo com o incremento dos valores do $|\delta|$. Por outro lado, para $\delta > 0$, [Figura 4b](#) mostra que perto da origem, os perfis quase se sobrepõem àquele correspondente ao modelo de MH, mas a uma certa distância da origem estes ficam mais largos para valores crescentes de δ . Em ambos os casos, longe da origem, estes

vão a zero segundo a escala de massa dada em (3.55). De modo similar ao comportamento do perfil do campo de Higgs, os perfis de $a(\rho)$ convergem a zero mais lentamente que o seu correspondente no modelo de Maxwell-Higgs ($\delta = 0$).

O gráfico da Figura 5 apresenta os perfis do campo magnético $B(\rho)$ para $n = 1$. Na Figura 5a são mostrados os perfis para $\delta < 0$. Nota-se que na origem o campo magnético apresenta sempre o valor finito ev^2 . À medida que nos afastamos da origem, percebe-se que o parâmetro de violação de Lorentz influencia no campo magnético fazendo-o assumir uma forma tipo anel. Quanto menor o valor de δ , mais intenso será o máximo de $B(\rho)$, sendo este mais localizado nesta região. Mas logo após ter alcançado o valor máximo, começa a decair à medida que o raio ρ cresce, até atingir o valor nulo em $\rho \rightarrow \infty$. Contudo, os perfis são mais largos se comparado aos do MH. O comportamento tipo anel contrasta os perfis tipo *lump* do campo magnético no modelo de Maxwell-Higgs.

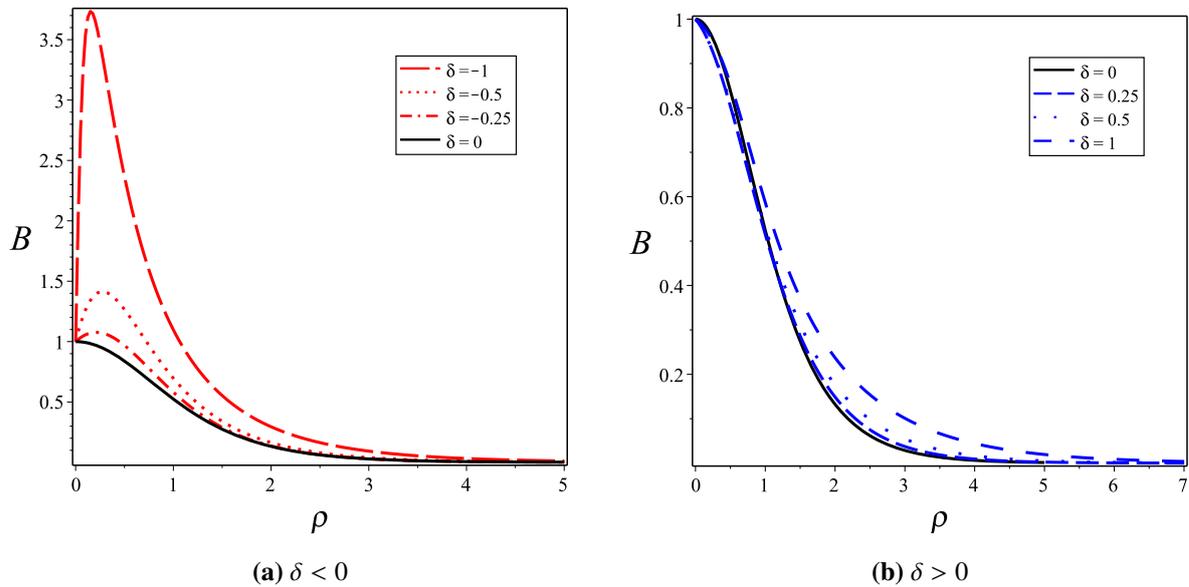


Figura 5 – O perfil do campo magnético $B(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas negras ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis para $\delta > 0$.

Na Figura 5b temos os perfis do campo magnético para $\delta > 0$. Os perfis são *lumps* semelhantes ao de Maxwell-Higgs com o mesmo valor ev^2 na origem. Podemos apreciar que perto da origem o campo magnético possui intensidades menores que o campo de MH mas a certa distância da origem os perfis cruzam àquele do modelo MH e decai até atingir o valor nulo no infinito. No entanto, o comprimento característico de $B(\rho)$ aumenta quanto maior for o valor de δ , isso demonstra que o campo magnético é menos localizado que o modelo de Maxwell-Higgs.

A figura Figura 6 mostra os perfis da densidade de energia BPS para $n = 1$. A Figura 6a ilustra os perfis para $\delta < 0$. A densidade de energia \mathcal{E}_{BPS} assume valores finitos cada vez maiores em $\rho = 0$ para valores de δ cada vez menores. Devido que os perfis não são mais largos que os do

MH, neste intervalo de valores de δ , os vórtices deste modelo são mais localizados e armazenam mais energia que os seus similares do MH. Esse comportamento revela que quanto menor o valor do parâmetro de quebra da simetria de Lorentz, mais localizada na origem será a densidade de energia BPS.

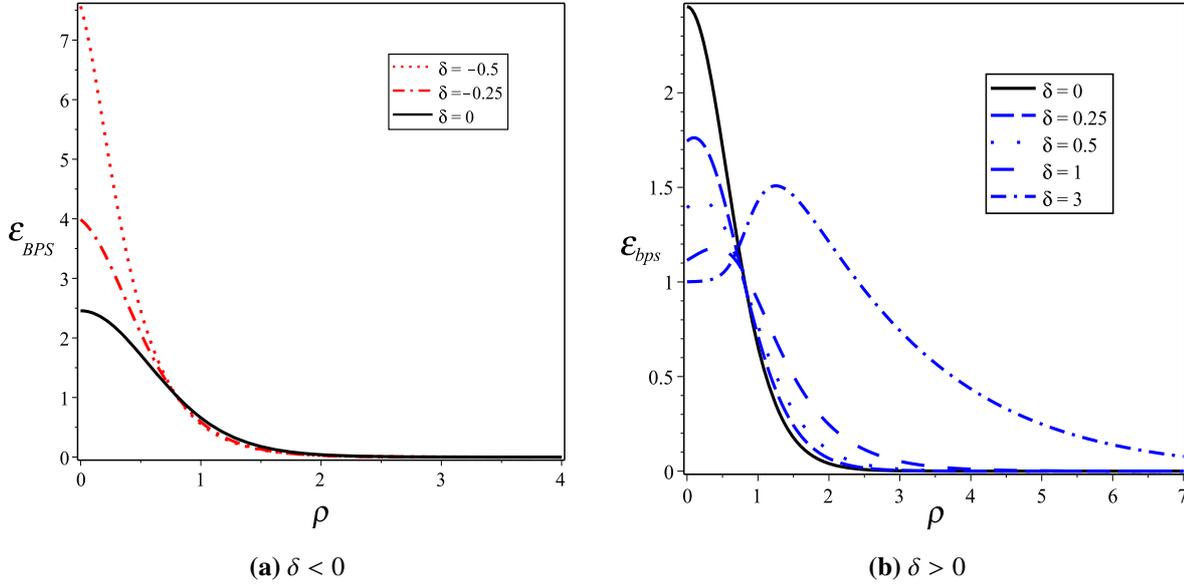


Figura 6 – O perfil da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $n = 1$. As linhas vermelhas representam as soluções para $\delta < 0$, as linhas negras ($\delta = 0$) dão as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual e as linhas azuis para $\delta > 0$.

Por outro lado, analisando a [Figura 6b](#), a qual mostra o perfil da densidade energia \mathcal{E}_{BPS} para $\delta > 0$, vemos que quanto maior for o valor de δ , menor será o valor de \mathcal{E}_{BPS} na origem até atingir o valor $e^2 v^4$. Contudo, ao nos afastamos um pouco da origem a energia começa a ter um comportamento tipo anel, atingindo um valor máximo, após isso decai até convergir ao valor nulo em $\rho \rightarrow \infty$. Esse é um efeito novo devido a quebra da simetria de Lorentz, pois o perfil tipo anel somente aparece no MH quando $n > 1$.

3.5.2 Gráficos das soluções obtidas para $\delta = -0.5$ e $n = 1, 4, 10, 20$

Abaixo exibimos os gráficos dos perfis $g(\rho)$, $a(\rho)$, $B(\rho)$ e \mathcal{E}_{BPS} para $\delta = -0.5$ e $n = 1, 4, 10, 20$. As linhas sólidas representam o comportamento dos perfis no modelo Maxwell-Higgs mínimo em cada um dos valores de n .

A [Figura 7](#) mostra o comportamento dos perfis para o campo de Higgs e para o potencial vetor em vários valores de n . No gráfico da [Figura 7a](#) logo se nota que em todos os valores de n os perfis do campo de Higgs são mais estreitos que aqueles do modelo MH. Outro fato que chama a atenção é a de que os perfis se apresentam mais largos conforme n assumia um valor maior. Na [Figura 7b](#) temos o comportamento do perfil do potencial vetor. Como se observa $a(\rho)$ tem valor igual a n na origem O comportamento padrão do perfil do potencial vetor apresenta

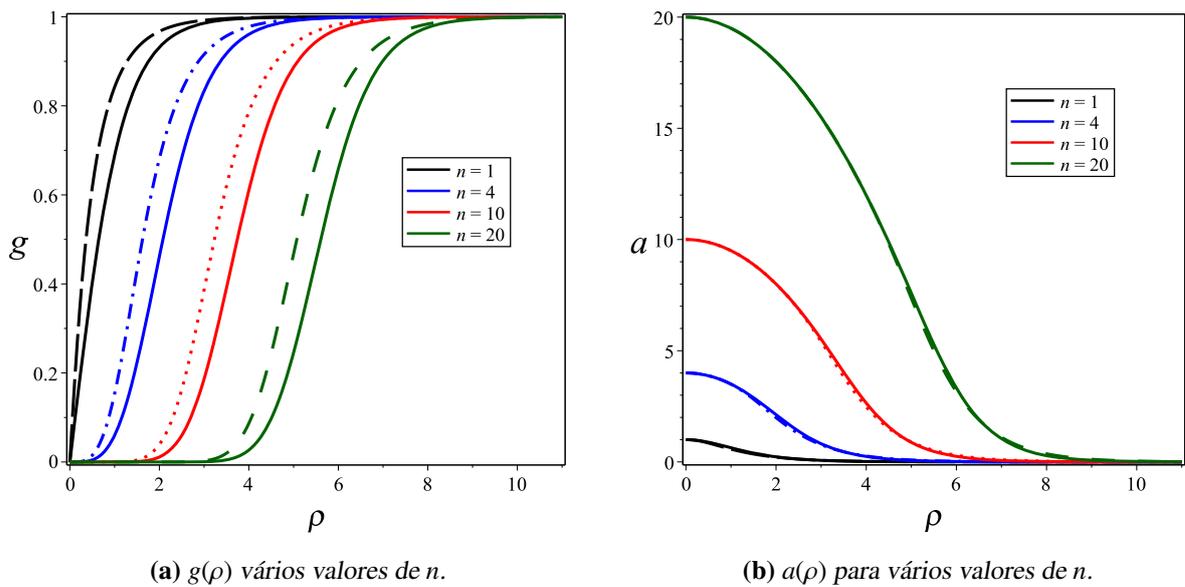


Figura 7 – Os perfis dos campos de Higgs $g(\rho)$ e gauge $a(\rho)$ para $\delta = -0.5$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual

decaimento ao valor nulo em $\rho \rightarrow \infty$. O parâmetro de quebra parece quase não influenciar no comportamento de $a(\rho)$, uma vez que as curvas sólidas e as pontilhadas quase se sobrepõem.

Na [Figura 8a](#) apresentamos os perfis do campo magnético. Vemos que para $\delta < 0$ e todo valor de n , o comportamento de $B(\rho)$ é afetado pela violação da simetria de Lorentz e se apresenta bem distinto do observado no modelo mínimo. Os perfis apresentam comportamento tipo anel cujo valor máximo se localiza mais próximo da origem para valores menores de n . Esse é um efeito novo provido pela quebra de Lorentz, já que no MH o campo magnético, para $n > 1$, sempre apresenta uma região de platô cuja largura se incrementa quando n aumenta. Em comparação com Maxwell-Higgs percebe-se que o campo magnético apresenta um largura maior.

Na [Figura 8b](#) é apresentado o comportamento dos perfis da densidade de energia BPS para $\delta < 0$ e alguns valores de n . Para $n > 1$, o perfis perto da origem tem comportamentos análogos e quando se afastam da origem formam anéis, similares aos do modelo mínimo. Embora, para n fixo, as amplitudes máximas dos anéis sejam maiores nas soluções não mínimas. Cabe destacar que os máximos do modelo não-mínimo são mais próximos da origem e a largura é menor, quando comparada a seus equivalentes no modelo Maxwell-Higgs.

3.5.3 Gráficos das soluções obtidas para $\delta = 1$ e $n = 1, 4, 10, 20$

Abaixo exibimos os gráficos dos perfis $g(\rho)$, $a(\rho)$, $B(\rho)$ e \mathcal{E}_{BPS} para $\delta = 1$ e $n = 1, 4, 10, 20$. As linhas sólidas representam o comportamento dos perfis no modelo Maxwell-Higgs mínimo em cada um dos valores de n .

A [Figura 9a](#) mostra que os perfis do campo de Higgs do modelo não mínimo em

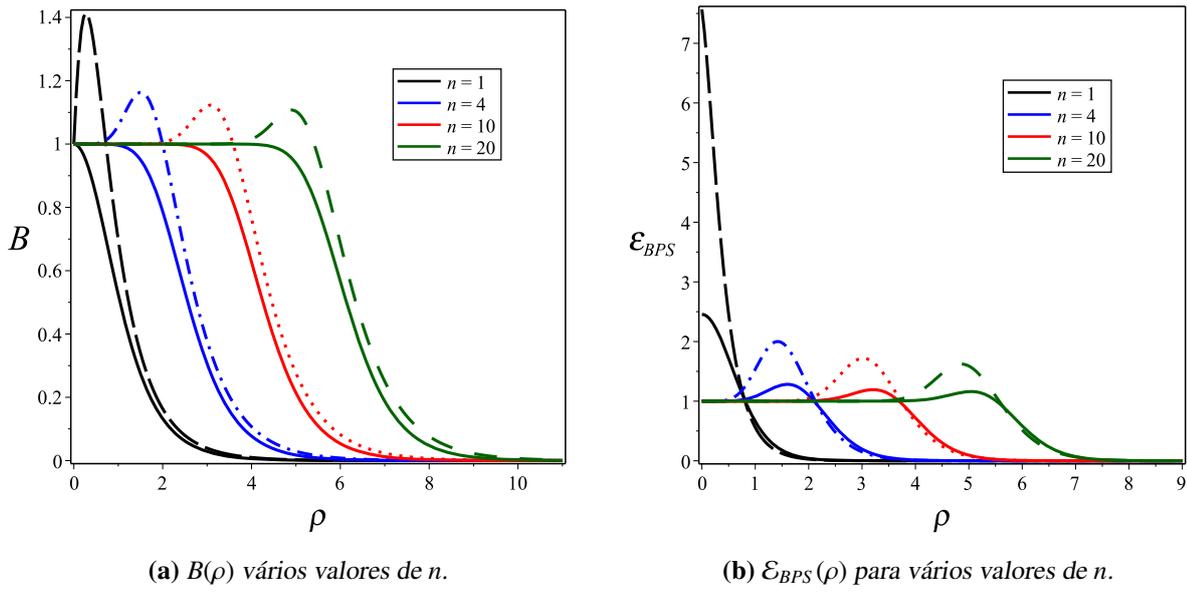


Figura 8 – Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $\delta = -0,5$. A linha sólida representa as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.

comparação com o modelo Maxwell-Higgs, são mais largos em cada um dos valores de n . Contudo, os perfis do campo de Higgs convergem mais lentamente ao estado de vácuo que os do MH usual.

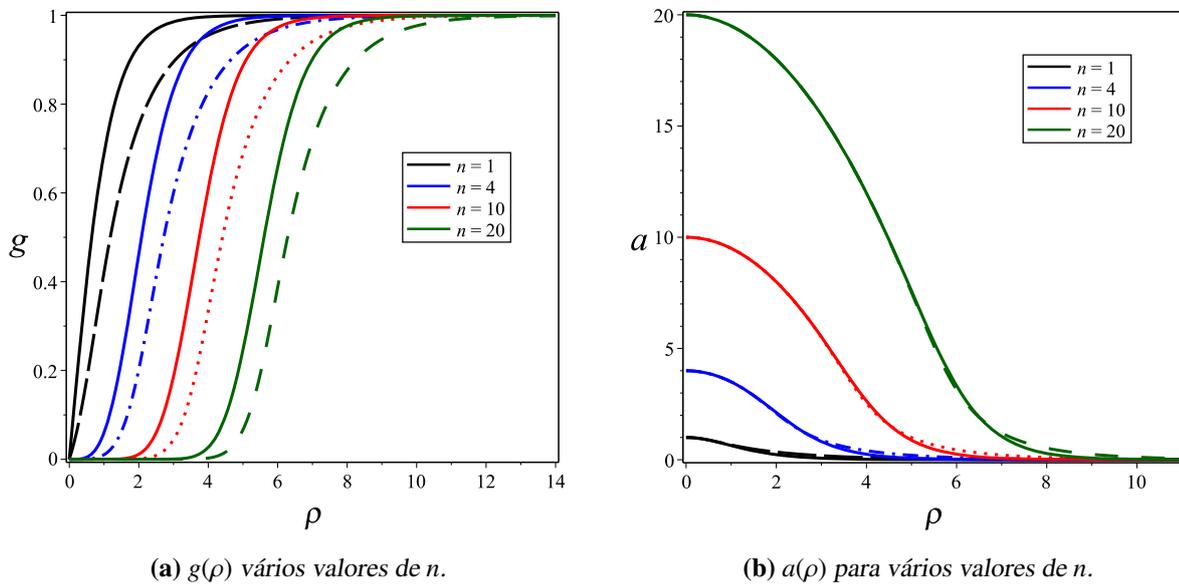


Figura 9 – O perfil dos campos de Higgs $g(\rho)$ e gauge $a(\rho)$ para $\delta = 1$. As linhas sólidas representam as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs mínimo.

A Figura 9b apresenta o comportamento dos perfis do potencial vetor. Próximos da origem, os perfis quase se sobrepõem àqueles do modelo Maxwell-Higgs, para cada um dos valores de n . Conforme a distância aumenta, há uma região onde as larguras primeiramente se estreitam e depois se alargam, em relação aos perfis de MH. A região onde os perfis ficam mais

largos está longe da origem e as intensidades são pequenas. Isso mostra que, embora os perfis sejam muito parecidos, o parâmetro de quebra sempre influencia no comportamento de $a(\rho)$.

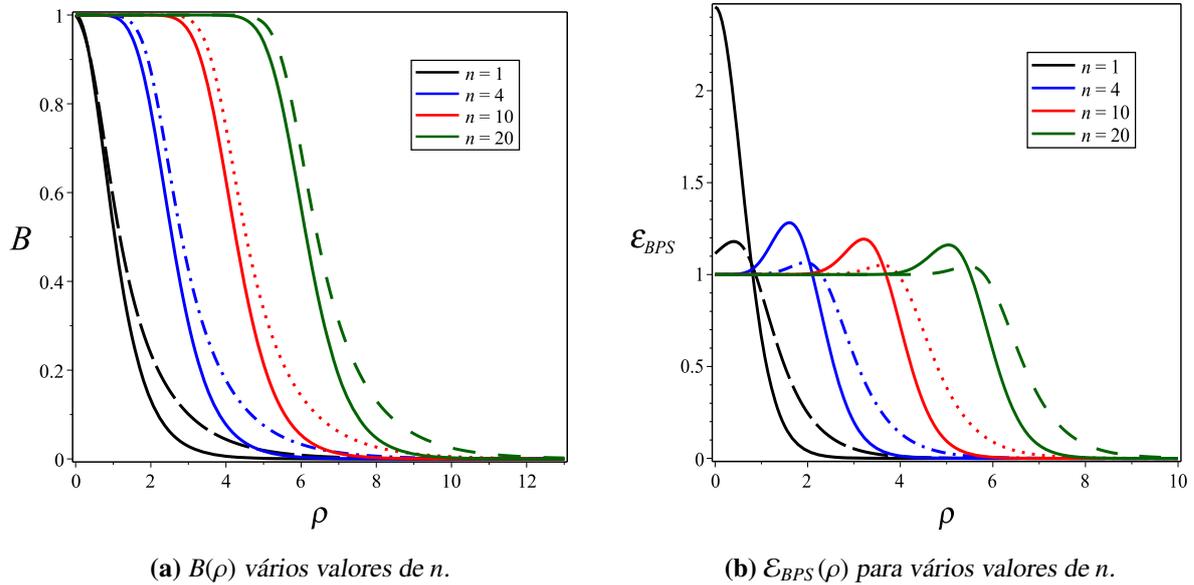


Figura 10 – Os perfis do campo magnético $B(\rho)$ e da densidade de energia BPS $\mathcal{E}_{BPS}(\rho)$ para $\delta = 1$. A linha sólida representa as soluções BPS para o modelo Maxwell-Higgs usual.

Na [Figura 10a](#) vemos os perfis do campo magnético para $\delta = 1$ fixo. Para $n > 1$, os perfis de $B(\rho)$ formam um platô que se mantém até um certo comprimento do raio ρ . Quanto maior o valor de n , maior será a largura do platô. Em comparação com o modelo Maxwell-Higgs, vemos que o campo magnético possui uma largura maior para todos os valores de n .

A [Figura 10b](#) apresenta os perfis da densidade de energia BPS para $\delta = 1$ fixo. Para $n > 1$, os perfis também formam anéis. Do mesmo modo que no modelo de Maxwell-Higgs, apresentam valor finito na origem (exatamente igual a $e^2 v^4$) e formam um platô entorno dele. Entretanto, para cada valor de n , o tamanho do platô dos perfis não-mínimos são um pouco maiores; a amplitude máxima dos anéis é menor e ficam a uma distância ligeiramente maior da origem.

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação foi realizado o estudo de vórtices BPS, dentro da eletrodinâmica de Maxwell-Higgs modificada pela presença de um acoplamento não mínimo que viola tanto a simetria CPT como a de Lorentz. Ainda no primeiro capítulo, apresentamos o método de Bogomol'nyi, um formalismo que permite obter soluções de mínima energia para a dinâmica dos campos. Estas soluções, no regime estacionário, são descritas por equações não lineares de primeira ordem, chamadas de equações BPS ou auto-duais. Neste caso as soluções BPS também satisfazem as equações de segunda ordem de Euler-Lagrange.

No segundo capítulo, a título de revisão abordamos o estudo do modelo abeliano de Maxwell-Higgs o qual é dotado de um acoplamento mínimo entre os campo de Higgs e gauge, e sob influência de um potencial do tipo $|\phi|^4$. Vimos que a lei de Gauss é satisfeita trivialmente pelo condição $A_0 = 0$, implicando na obtenção de soluções tipo vórtices sem carga elétrica. Soluções tipo vórtice, são obtidas usando o ansatz proposto por Abrikosov e verificamos o comportamento dos campos nas fronteiras. Aplicando o formalismo BPS, obtivemos a energia total dos vórtices, sendo esta quantizada e linearmente dependente da vorticidade n , caracterizando a topologia do campo de gauge.

No terceiro capítulo, foi apresentado o modelo Maxwell-Higgs dotado de um acoplamento não-mínimo que quebra as simetrias de Lorentz e de CPT. Procedemos de modo similar ao caso do modelo de Maxwell-Higgs mínimo para obter o potencial BPS. Contudo, o acoplamento não-mínimo modifica as equações BPS. Tais modificações ocorrem porque a auto-interação do campo de Higgs é composta, além do potencial $|\phi|^4$, de um acoplamento derivativo. As soluções numéricas das equações BPS modificadas mostram que, em comparação as soluções de Maxwell-Higgs, no núcleo do vórtice, para todos os valores de n , os perfis do campo de Higgs são mais estreitos quando δ torna-se mais negativo. Por outro lado, o comprimento do perfis do campo de Higgs é incrementado quando os valores de $\delta > 0$ aumentam. Além disso, os perfis do campo magnético, para $\delta < 0$ e para todos os valores de n , formam estruturas tipo anéis. Por outro lado, para $\delta > 0$, tais perfis, mantém um estrutura tipo *lump* para soluções de Maxwell-Higgs.

Já a densidade de energia BPS, para $\delta < 0$ e $n = 1$, apresenta perfis do tipo ev^2 centrados na origem, cuja a amplitude cresce em relação ao modelo de Maxwell-Higgs, sempre que δ torna-se mais negativo. Por outro lado, para $n > 1$ os perfis são tipo anéis, mas a amplitude máxima é maior e localizada a uma menor distancia da origem do que o modelo Maxwell-Higgs mínimo. Além do mais, para $\delta > 0$ e $n = 1$, os perfis da densidade de energia BPS formam estruturas tipo anéis cuja amplitude na origem decresce em relação ao modelo mínimo atingindo um valor mínimo e^2v^4 , sempre que δ torna-se mais positiva.

Tem-se como perspectiva que o modelo possa ser também estudado no contexto das eletrodinâmicas de Chern-Simons-Higgs, de Maxwell-Chern-Simons-Higgs ou de Born-Infeld. Também, pretendemos estudar a influencia do acoplamento no mínimo no contexto dos modelos generalizados de MH, CSH e MCSH. Por outro lado, em (1+3)-dimensões podemos investigar as modificações introduzidas por este acoplamento não-mínimo na equação de Dirac e suas soluções nos níveis não relativístico e relativístico. Um estudo também interessante seria estudar as correções radiativas na eletrodinâmica quântica devidas a este acoplamento não mínimo, entre outros.

Referências

- 1 NEWTON, I.; MOTTE, A.; CAJORI, F. **Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World**: The system of the world. University of California Press, 1962. ISBN 9780520009295. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=gB2-Hqdx_LUC>. Citado na página 17.
- 2 THOMSON, f. B. K. W. **Mathematical and Physical Papers**. 1. ed. Cambridge University Press, 2011. v. 4. 1 - 12 p. (Cambridge Library Collection - Physical Sciences, v. 4). Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. VI, 1867, pp. 94-105. Reprinted in Phil. Mag. Vol. XXXIV, 1867, pp. 15-24. ISBN 9781108029018. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=rS7KlfxIAIUC>>. Citado na página 17.
- 3 ABRIKOSOV, A. A. The magnetic properties of superconducting alloys. **Journal of Physics and Chemistry of Solids**, v. 2, n. 3, p. 199 – 208, 1957. ISSN 0022-3697. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022369757900835>>. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 30, 33 e 45.
- 4 GINZBURG, V. L. *On the theory of supeconductivity*. **Il Nuovo Cimento Series 10**, Società Italiana di Fisica, v. 2, n. 6, p. 1234–1250, 1955. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02731579>>. Citado na página 18.
- 5 HAAR, D. ter. Men of physics: L.d. landau. In: HAAR, D. ter (Ed.). **Low Temperature and Solid State Physics**. Pergamon, 1965. v. 1, cap. 6 - *On the Theory of Superconductivity*, p. 138 – 167. ISBN 978-0-08-010523-9. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978008010523950016X>>. Citado na página 18.
- 6 COOPER, L. N. *Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas*. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 104, p. 1189–1190, Nov 1956. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.104.1189>>. Citado na página 18.
- 7 BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. *Microscopic Theory of Superconductivity*. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 106, p. 162–164, Apr 1957. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.162>>. Citado na página 18.
- 8 BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. *Theory of Superconductivity*. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 108, p. 1175–1204, Dec 1957. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>>. Citado na página 18.
- 9 GOR'KOV, L. P. *Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equation in the theory of superconductivity*. **Soviet Physics JETP**, v. 36, n. 6, p. 1364 – 1367, June 1959. Citado na página 18.
- 10 ONSAGER, L. *Statistical hydrodynamics*. **Il Nuovo Cimento Series 9**, Società Italiana di Fisica, v. 6, n. 2, p. 279–287, 1949. ISSN 0029-6341. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02780991>>. Citado na página 18.
- 11 FEYNMAN, R. Progress in low temperature physics. In: GORTER, C. (Ed.). Elsevier, 1955, (Progress in Low Temperature Physics, v. 1). cap. II *Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium*, p. 17 – 53. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079641708600773>>. Citado na página 18.

- 12 NIELSEN, H.; OLESEN, P. *Vortex-line models for dual strings*. **Nuclear Physics B**, v. 61, n. 0, p. 45 – 61, 1973. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321373903507>>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 33 e 45.
- 13 SCHAPOSNIK, F. A.; DE VEGA, H. J. *Classical vortex solution of the Abelian Higgs model*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 14, p. 1100–1106, Aug 1976. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.1100>>. Citado na página 18.
- 14 DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 48, p. 975–978, Apr 1982. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.975>>. Citado na página 18.
- 15 DE VEGA, H. J.; SCHAPOSNIK, F. A. *Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 56, p. 2564–2566, Jun 1986. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.2564>>. Citado na página 18.
- 16 PAUL, S. K.; KHARE, A. *Charged vortices in an Abelian Higgs model with Chern-Simons term*. **Physics Letters B**, v. 174, n. 4, p. 420 – 422, 1986. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269386910282>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- 17 KHARE, A. *Charged vortices and Q-balls in an Abelian Higgs model exhibiting a first order phase transition*. **Physics Letters B**, v. 255, n. 3, p. 393 – 397, 1991. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190784N>>. Citado na página 18.
- 18 JACKIW, R.; LEE, K.; WEINBERG, E. J. *Self-dual Chern-Simons solitons*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 42, p. 3488–3499, Nov 1990. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.3488>>. Citado na página 18.
- 19 BOGOMOL'NYI, E. B. *The stability of classical solution*. **Sov. J. Nucl. Phys.**, American Institute of Physics, v. 24, n. 4, p. 449, outubro 1976. Citado 7 vezes nas páginas 18, 22, 23, 24, 30, 33 e 41.
- 20 PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 35, p. 760–762, setembro 1975. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.760>>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 22 e 23.
- 21 JACKIW, R.; WEINBERG, E. J. *Self-dual Chern-Simons vortices*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 64, p. 2234–2237, May 1990. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.2234>>. Citado na página 18.
- 22 HONG, J.; KIM, Y.; PAC, P. Y. *Multivortex solutions of the Abelian Chern-Simons-Higgs theory*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 64, p. 2230–2233, May 1990. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.2230>>. Citado na página 18.
- 23 HYUN, S. *et al. Vortex solutions of a Maxwell-Chern-Simons field coupled to four-fermion theory*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 55, p. 3900–3902, Mar 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.3900>>. Citado na página 19.

- 24 PAUL, S. K.; KHARE, A. *Chern-Simons term by spontaneous symmetry breaking in an Abelian Higgs model*. **Physics Letters B**, v. 193, n. 2-3, p. 253 – 256, 1987. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269387912317>>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 37 e 38.
- 25 JATKAR, D. P.; KHARE, A. *Peculiar charged vortices in Higgs models with pure Chern-Simons term*. **Physics Letters B**, v. 236, n. 3, p. 283 – 286, 1990. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939090983D>>. Citado na página 19.
- 26 TORRES, M. *Bogomol'nyi limit for nontopological solitons in a Chern-Simons model with anomalous magnetic moment*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 46, p. R2295–R2298, September 1992. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.46.R2295>>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 37 e 38.
- 27 GHOSH, P. K. *Bogomol'nyi equations of Maxwell-Chern-Simons vortices from a generalized Abelian Higgs model*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 49, p. 5458–5468, May 1994. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.5458>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 38.
- 28 ANTILLÓN, A. *et al. Self-dual non-Abelian vortices in a Φ^2 Chern-Simons theory*. **Physics Letters B**, v. 359, n. 3-4, p. 327 – 333, 1995. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269395010774>>. Citado na página 19.
- 29 LEE, H.-j.; LEE, J. Y.; YEE, J. H. *Vortex solutions of four-fermion theory coupled to a Yang-Mills-Chern-Simons gauge field*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, p. 087701, Sep 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.087701>>. Citado na página 19.
- 30 KIM, B. S.; LEE, H.-j.; YEE, J. H. *Vortex solutions of nonrelativistic Fermion and scalar field theories coupled to Maxwell-Chern-Simons gauge fields*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 61, p. 025010, Dec 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.025010>>. Citado na página 19.
- 31 CHANDELIER, F. *et al. Vortex in Maxwell-Chern-Simons models coupled to external backgrounds*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 70, p. 065016, Sep 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.065016>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 38.
- 32 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. *CPT violation and the standard model*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 55, p. 6760–6774, Jun 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.6760>>. Citado na página 20.
- 33 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. *Lorentz-violating extension of the standard model*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, p. 116002, Oct 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.116002>>. Citado na página 20.
- 34 COLEMAN, S.; GLASHOW, S. L. *High-energy tests of Lorentz invariance*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 59, p. 116008, Apr 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.116008>>. Citado na página 20.

- 35 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 63, p. 224–227, Jul 1989. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.63.224>>. Citado na página 20.
- 36 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Photon and graviton masses in string theories*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 66, p. 1811–1814, Apr 1991. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.1811>>. Citado na página 20.
- 37 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 39, p. 683–685, Jan 1989. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.39.683>>. Citado na página 20.
- 38 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. *Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 40, p. 1886–1903, Sep 1989. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.1886>>. Citado na página 20.
- 39 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. *CPT, strings, and meson factories*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 51, p. 3923–3935, Apr 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.3923>>. Citado na página 20.
- 40 ALTSCHUL, B. *Compton scattering in the presence of Lorentz and CPT violation*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 70, p. 056005, Sep 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.056005>>. Citado na página 20.
- 41 SHORE, G. M. *Strong equivalence, Lorentz and CPT violation, anti-hydrogen spectroscopy and gamma-ray burst polarimetry*. **Nuclear Physics B**, v. 717, n. 1-2, p. 86 – 118, 2005. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321305002828>>. Citado na página 20.
- 42 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. *Cross sections and lorentz violation*. **Physics Letters B**, v. 511, n. 2-4, p. 209 – 217, 2001. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301006499>>. Citado na página 20.
- 43 GOMES, M. *et al.* *Aetherlike Lorentz-breaking actions*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 045018, Feb 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.045018>>. Citado na página 20.
- 44 MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y. *Perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 125003, Jun 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.125003>>. Citado na página 20.
- 45 BAKKE, K.; BELICH, H. *Abelian geometric phase for a Dirac neutral particle in a Lorentz symmetry violation environment*. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 39, n. 8, p. 085001, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/39/i=8/a=085001>>. Citado na página 20.
- 46 BAKKE, K.; BELICH, H.; SILVA, E. O. *Relativistic Landau-Aharonov-Casher quantization based on the Lorentz symmetry violation background*. **Journal of Mathematical Physics**, v. 52, n. 6, 2011. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/52/6/10.1063/1.3597230>>. Citado na página 20.

- 47 BAKKE, K.; SILVA, E. O.; BELICH, H. *He-McKellar-Wilkins effect and scalar Aharonov-Bohm effect for a neutral particle based on the Lorentz symmetry violation*. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 39, n. 5, p. 055004, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/39/i=5/a=055004>>. Citado na página 20.
- 48 CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 41, p. 1231–1240, Feb 1990. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.41.1231>>. Citado na página 20.
- 49 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. *Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 87, p. 251304, Nov 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.251304>>. Citado na página 20.
- 50 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. *Signals for Lorentz violation in electrodynamics*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 66, p. 056005, Sep 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.056005>>. Citado na página 20.
- 51 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. *Sensitive Polarimetric Search for Relativity Violations in Gamma-Ray Bursts*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 97, p. 140401, Oct 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.140401>>. Citado na página 20.
- 52 ALTSCHUL, B. *Finite duration and energy effects in Lorentz-violating vacuum Cerenkov radiation*. **Nuclear Physics B**, v. 796, n. 1-2, p. 262 – 273, 2008. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321307009509>>. Citado na página 20.
- 53 ALTSCHUL, B. *Vacuum Čerenkov Radiation in Lorentz-Violating Theories Without CPT Violation*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 98, p. 041603, Jan 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.041603>>. Citado na página 20.
- 54 KAUFHOLD, C.; KLINKHAMER, F. R. *Vacuum Cherenkov radiation in spacelike Maxwell-Chern-Simons theory*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 76, p. 025024, Jul 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.025024>>. Citado na página 20.
- 55 KLINKHAMER, F. R.; RISSE, M. *Ultrahigh-energy cosmic-ray bounds on nonbirefringent modified Maxwell theory*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 77, p. 016002, Jan 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.016002>>. Citado na página 20.
- 56 KLINKHAMER, F. R.; SCHRECK, M. *New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified Maxwell theory*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, p. 085026, Oct 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.085026>>. Citado na página 20.
- 57 KOSTELECKÝ, V. A. *Gravity, Lorentz violation, and the standard model*. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 69, p. 105009, May 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.105009>>. Citado na página 20.
- 58 KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N.; TASSON, J. D. *Constraints on Torsion from Bounds on Lorentz Violation*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 100, p. 111102, Mar 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.111102>>. Citado na página 20.

- 59 BOLDO, J. *et al.* Graviton excitations and Lorentz-violating gravity with cosmological constant. **Physics Letters B**, v. 689, n. 2-3, p. 112 – 115, 2010. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269310005356>>. Citado na página 20.
- 60 KOSTELECKÝ, V. A.; TASSON, J. D. Matter-gravity couplings and Lorentz violation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 016013, Jan 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.016013>>. Citado na página 20.
- 61 BARRETO, M. N.; BAZEIA, D.; MENEZES, R. Defect structures in Lorentz and CPT violating scenarios. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 73, p. 065015, Mar 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.065015>>. Citado na página 20.
- 62 DUTRA, A. de S.; HOTT, M.; BARONE, F. A. Two field BPS solutions for generalized Lorentz breaking models. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 74, p. 085030, Oct 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.085030>>. Citado na página 20.
- 63 BAZEIA, D. *et al.* Lorentz-violating effects on topological defects generated by two real scalar fields. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 239, n. 12, p. 942 – 947, 2010. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278910000357>>. Citado na página 20.
- 64 DUTRA, A. de S.; CORREA, R. A. C. Traveling solitons in Lorentz and CPT breaking systems. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 105007, May 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.105007>>. Citado na página 20.
- 65 SEIFERT, M. D. Dynamical Lorentz symmetry breaking and topological defects. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 82, p. 125015, Dec 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.125015>>. Citado na página 20.
- 66 SCARPELLI, A. P. B. *et al.* Aspects of causality and unitarity and comments on vortexlike configurations in an Abelian model with a Lorentz-breaking term. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 67, p. 085021, Apr 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.085021>>. Citado na página 20.
- 67 FALOMIR, H. *et al.* Vortices, infrared effects and Lorentz invariance violation. **Physics Letters B**, v. 632, n. 5-6, p. 740 – 744, 2006. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305016977>>. Citado na página 20.
- 68 FALOMIR, H. *et al.* Vortices in $U(1)$ noncommutative gauge fields. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 74, p. 047701, Aug 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.047701>>. Citado na página 20.
- 69 CASANA, R. *et al.* Uncharged compactlike and fractional Lorentz-violating BPS vortices in the CPT-even sector of the standard model extension. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 86, p. 065011, Sep 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.065011>>. Citado na página 20.
- 70 CASANA, R. *et al.* Magnetic flux inversion in charged BPS vortices in a Lorentz-violating Maxwell-Higgs framework. **Physics Letters B**, v. 718, n. 2, p. 620 – 624, 2012. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312011070>>. Citado na página 20.

- 71 BOGOMOL'NYI, E. B.; VAĬNSHTEĬN, A. I. *Stability of strings in gauge Abelian theory*. **Sov. J. Nucl. Phys.**, American Institute of Physics, v. 23, p. 588, maio 1976. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- 72 SANTOS, C. E. da H. **Vórtices em teorias k-generalizadas**. 78 f. Tese (Doutorado em Física) — Programa de Pós Graduação em Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012. Disponível em: <http://btd.biblioteca.ufpb.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=2535>. Citado na página 27.
- 73 REDLICH, A. N.; WIJEWARDHANA, L. C. R. Induced Chern-Simons Terms at High Temperatures and Finite Densities. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 54, p. 970–973, Mar 1985. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.970>>. Citado na página 37.
- 74 STENBACKA, R. *et al.* Differential $\bar{N}N \rightarrow \bar{N}\pi N$ isospin amplitudes at 9 GeV/c. **Nuclear Physics B**, v. 157, n. 3, p. 413 – 424, 1979. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379901123>>. Citado na página 37.
- 75 NIEMI, A. J.; SEMENOFF, G. W. Comment on “Induced Chern-Simons Terms at High Temperatures and Finite Densities”. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 54, p. 2166–2166, May 1985. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.2166>>. Citado na página 37.
- 76 KOGAN, I. I. Induced magnetic moment for anyons. **Physics Letters B**, v. 262, n. 1, p. 83 – 87, 1991. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269391906479>>. Citado na página 38.
- 77 STERN, J. Topological action at a distance and the magnetic moment of point-like anyons. **Physics Letters B**, v. 265, n. 1-2, p. 119 – 123, 1991. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190024K>>. Citado na página 38.
- 78 FRIEDBERG, R.; LEE, T. D. Fermion-field nontopological solitons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 15, p. 1694–1711, Mar 1977. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.1694>>. Citado na página 38.
- 79 FRIEDBERG, R.; LEE, T. D. Fermion-field nontopological solitons. II. Models for hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 16, p. 1096–1118, Aug 1977. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.1096>>. Citado na página 38.
- 80 FRIEDBERG, R.; LEE, T. D. Quantum chromodynamics and the soliton model of hadrons. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 18, p. 2623–2631, Oct 1978. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.2623>>. Citado na página 38.
- 81 HULL, C. *et al.* Nonlinear σ -models and their gauging in and out of superspace. **Nuclear Physics B**, v. 266, n. 1, p. 1 – 44, 1986. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321386901756>>. Citado na página 38.
- 82 GEORGELIN, Y.; WALLET, J. C. On maxwell-chern-simons theory with anomalous magnetic moment. **Modern Physics Letters A**, v. 07, n. 13, p. 1149–1156, 1992. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732392003608>>. Citado na página 38.

83 GEORGELIN, Y.; WALLET, J.-C. Anomalous magnetic moment for scalars and spinors in maxwell-chern-simons electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 50, p. 6610–6615, Nov 1994. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.6610>>. Citado na página 38.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo de algumas identidades

A.1 Identidades do capítulo 2

Nesta seção apresentamos o procedimento para encontrar a identidade da eq. (2.17). Inicialmente definimos o “operador” $D_{\pm}\phi$ e escrevemos

$$D_{\pm}\phi = D_1\phi \pm iD_2\phi. \quad (\text{A.1})$$

O módulo quadrado deste operador é dado por

$$|D_{\pm}\phi|^2 = (D_{\pm}\phi)^*(D_{\pm}\phi) = |D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2 \pm i[(D_1\phi)^*(D_2\phi) - (D_2\phi)^*(D_1\phi)]. \quad (\text{A.2})$$

É conveniente reescrevermos este resultado em termos da soma de índices latinos

$$|D_{\pm}\phi|^2 = |D_j\phi|^2 \pm i\epsilon_{ij}(D_i\phi)^*(D_j\phi), \quad (\text{A.3})$$

onde $i, j = 1, 2$ e $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = +1$. A fim de calcularmos o último termo em (A.3), escrevermos a densidade de corrente, eq. (2.8), na forma

$$J_i = i[\phi(D_i\phi)^* - \phi^*(D_i\phi)], \quad (\text{A.4})$$

e, em seguida calculamos o seu “rotacional” (isto é, aplicamos $\epsilon_{ji}\partial_j$), resultando em

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = i\epsilon_{ji}[(\partial_j\phi)(D_i\phi)^* + \phi(\partial_j D_i\phi)^* - (\partial_j\phi)^*(D_i\phi) - \phi^*(\partial_j D_i\phi)]. \quad (\text{A.5})$$

Lembrando que $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$, podemos mostrar que $D_j D_i \phi = \partial_j D_i \phi - ieA_j D_i \phi$ e, portanto, vê-se que

$$\partial_j D_i \phi = D_j D_i \phi + ieA_j D_i \phi. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo este último resultado em (A.5), que após alguma manipulação algébrica, nos conduz à

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = \epsilon_{ji}(i\partial_j\phi + eA_j\phi)(D_i\phi)^* + \epsilon_{ji}(i\partial_j\phi + eA_j\phi)^*(D_i\phi) + i\epsilon_{ji}\phi(D_j D_i \phi)^* - i\epsilon_{ji}\phi^* D_j D_i \phi. \quad (\text{A.7})$$

Agora, um olhar atento e um pouco de intuição nos permite notar que

$$i\partial_j\phi + eA_j\phi = iD_j\phi, \quad (\text{A.8})$$

e assim, reescrevemos (A.7) como

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = i\epsilon_{ji}(D_j\phi)(D_i\phi)^* - i\epsilon_{ji}(D_j\phi)^*(D_i\phi) + i\epsilon_{ji}\phi(D_j D_i \phi)^* - i\epsilon_{ji}\phi^* D_j D_i \phi. \quad (\text{A.9})$$

Aproveitando-se do fato que os índices são mudos, podemos expressar (A.9) em uma forma mais simples, dada por

$$\epsilon_{ji}\partial_j J_i = 2i\epsilon_{ji}(D_j\phi)(D_i\phi)^* + i[\phi(\epsilon_{ji}D_j D_i \phi)^* - \phi^*(\epsilon_{ji}D_j D_i \phi)]. \quad (\text{A.10})$$

O último termo pode ser obtido se este for escrito explicitamente em termos de A_i e ϕ . Procedendo assim, encontramos

$$\epsilon_{ji} D_j D_i \phi = \epsilon_{ji} (\partial_j \partial_i - e^2 A_j A_i) \phi - ieB\phi - ie\epsilon_{ji} A_i \partial_j \phi - ie\epsilon_{ij} A_i \partial_j \phi, \quad (\text{A.11})$$

onde foi usado $B = \epsilon_{ji} \partial_j A_i$. Note que os dois últimos termos se cancelam, já que $\epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij}$. Por outro lado, o fator $\partial_j \partial_i - e^2 A_j A_i$ é simétrico. Como ϵ_{ji} é antissimétrico, então

$$\epsilon_{ji} (\partial_j \partial_i - e^2 A_j A_i) \phi = 0. \quad (\text{A.12})$$

Desse modo, temos

$$\epsilon_{ji} D_j D_i \phi = -ieB\phi.$$

Substituindo esse resultado em (A.10) obtemos

$$\epsilon_{ji} \partial_j J_i = 2i\epsilon_{ji} (D_j \phi) (D_i \phi)^* - 2eB |\phi|^2, \quad (\text{A.13})$$

que ainda pode ser escrito na forma

$$i\epsilon_{ji} (D_j \phi) (D_i \phi)^* = \frac{1}{2} \epsilon_{ji} \partial_j J_i + eB |\phi|^2. \quad (\text{A.14})$$

Retornando a eq. (A.3), encontramos finalmente que

$$|D_{\pm} \phi|^2 = |D_j \phi|^2 \pm \left[-\frac{1}{2} \epsilon_{ji} \partial_j J_i - eB |\phi|^2 \right], \quad (\text{A.15})$$

ou ainda

$$|D_j \phi|^2 = |D_{\pm} \phi|^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ji} \partial_j J_i \pm eB |\phi|^2. \quad (\text{A.16})$$

A.2 Identidades do capítulo 3

Nesta seção, mostramos como obter a identidade da eq. (3.19). Para tanto, utilizando um procedimento similar ao da seção anterior, definimos o “operador” $\mathcal{D}_{\pm} \phi$ e escrevemos

$$\mathcal{D}_{\pm} \phi = \mathcal{D}_1 \phi \pm i\mathcal{D}_2 \phi. \quad (\text{A.17})$$

O módulo quadrado deste resulta em

$$|\mathcal{D}_{\pm} \phi|^2 = |\mathcal{D}_i \phi|^2 \pm i\epsilon_{ij} (\mathcal{D}_i \phi)^* (\mathcal{D}_j \phi). \quad (\text{A.18})$$

A fim de determinarmos o último termo da eq. (A.18), tomamos o “rotacional” (derivada $\epsilon_{ji} \partial_j$) sobre a densidade de corrente, eq. (3.14), na forma

$$\mathcal{J}_i = i[\phi (\mathcal{D}_i \phi)^* - \phi^* (\mathcal{D}_i \phi)], \quad (\text{A.19})$$

e obtemos

$$\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{J}_i = i\epsilon_{ji} \left[(\partial_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* - (\partial_j \phi)^* (\mathcal{D}_i \phi) \right] + i \left[\phi (\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{D}_i \phi)^* - \phi^* (\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{D}_i \phi) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Agora, de modo similar ao que foi feito na eq. (A.6), fazemos o uso da derivada covariante para mostrar que

$$\partial_j \mathcal{D}_i \phi = \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi + i(eA_j + F_{jl} \xi_l) \mathcal{D}_i \phi. \quad (\text{A.21})$$

Substituindo esse resultado em (A.20), encontramos

$$\epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{J}_i = 2i \epsilon_{ji} (\mathcal{D}_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* + i \left[\phi (\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi)^* - \phi^* (\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi) \right]. \quad (\text{A.22})$$

Mais uma vez, a derivada covariante pode ser usada para que $\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi$ seja escrito explicitamente em termos de ϕ e A_i , conduzindo-nos então à

$$\begin{aligned} \epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi = & -ieB\phi - i\epsilon_{ji} \partial_j (\epsilon_{ik} B \xi_k) \phi + \epsilon_{ji} \left[\partial_j \partial_i + (eA_j + \epsilon_{jl} B \xi_l) (eA_i + \epsilon_{ik} B \xi_k) \right] \phi \\ & - i(eA_i + \epsilon_{ik} B \xi_k) \epsilon_{ji} \partial_j \phi - i\epsilon_{ji} (eA_j + \epsilon_{jl} B \xi_l) \partial_i \phi, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

de se usou $F_{ij} = \epsilon_{ij} B$ e $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$. Aqui, observa-se que os dois últimos termos são iguais e, portanto, se cancelam¹. Já no termo central, nota-se que a expressão entre colchetes, $\partial_j \partial_i + (eA_j + \epsilon_{jl} B \xi_l) (eA_i + \epsilon_{ik} B \xi_k)$, é simétrica, enquanto o símbolo de Levi-Civita, ϵ_{ji} , é antissimétrico. É fato conhecido que o produto de um tensor antissimétrico por um simétrico resultado nulo. Portanto, temos

$$\epsilon_{ji} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_i \phi = -ieB\phi + i\partial_j (B \xi_j) \phi. \quad (\text{A.24})$$

Substituindo essa última expressão na eq. (A.22), e após reordenarmos os termos, obtemos

$$i\epsilon_{ji} (\mathcal{D}_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* = eB |\phi|^2 + \frac{1}{2} \epsilon_{ji} \partial_j \mathcal{J}_i - \partial_j (B \xi_j) |\phi|^2. \quad (\text{A.25})$$

O uso da identidade

$$\partial_j (B \xi_j) |\phi|^2 = \partial_j (\xi_j B |\phi|^2) - \xi_j B (\partial_j |\phi|^2), \quad (\text{A.26})$$

permite reescrevermos a expressão (A.25) na forma

$$i\epsilon_{ji} (\mathcal{D}_j \phi) (\mathcal{D}_i \phi)^* = eB |\phi|^2 + \xi_j B (\partial_j |\phi|^2) + \partial_j \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ji} \mathcal{J}_i - \xi_j B |\phi|^2 \right). \quad (\text{A.27})$$

Por fim, ao substituirmos (A.27) em (A.18), somos conduzidos à

$$|\mathcal{D}_i \phi|^2 = |\mathcal{D}_\pm \phi|^2 \pm \xi_j B (\partial_j |\phi|^2) \pm eB |\phi|^2 \pm \partial_j \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ji} \mathcal{J}_i - \xi_j B |\phi|^2 \right), \quad (\text{A.28})$$

que é de fato a mesma expressão da eq. (3.18).

¹ A igualdade é notada fazendo $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$ no último termo $i\epsilon_{ji} (eA_j + \epsilon_{jl} B \xi_l) \partial_i \phi$. Essa é uma operação permitida já que os índices são mudos e estamos lidando com somas.

Anexos



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM FÍSICA

Aos trinta dias do mês de setembro de dois mil e quatorze, às dezesseis horas, no Auditório do Prédio de Pós-Graduação do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus do Bacanga, o aluno **Alexsandro Lucena Mota**, candidato ao título de Mestre em Física, apresentou-se diante da Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores: Rodolfo Alván Casana Sifuentes - Orientador, Manoel Messias Ferreira Junior (UFMA) e Van Sérgio da Silva Alves (UFPA). O discente apresentou sua dissertação de mestrado sob o título "**Vórtices BPS na eletrodinâmica de Maxwell-Higgs com acoplamento não mínimo violando as simetrias de CPT e de Lorentz**", em forma de seminário, em sessão pública, tendo sido permitida a formulação de perguntas tanto pela Banca Examinadora como por outras pessoas presentes. Em seguida, a Banca Examinadora, sob a presidência do Orientador, reuniu-se para deliberar e decidiu por unanimidade pela **aprovação** da dissertação, tendo, portanto, o discente cumprido parte dos requisitos obrigatórios à obtenção do grau de Mestre. O Presidente da Banca Examinadora, para constar, lavrou a presente ata, que após lida e aprovada será assinada pelos membros da Banca. São Luís, 30 de setembro de 2014.

Presidente:

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Membros:

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior

Prof. Dr. Van Sérgio da Silva Alves