

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CAMILA CORREIA SOARES

**ESPALHAMENTO QUÂNTICO UNIDIMENSIONAL VIA
MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA**

São Luís
2017

CAMILA CORREIA SOARES

**ESPALHAMENTO QUÂNTICO UNIDIMENSIONAL VIA
MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro

São Luís
2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Soares, Camila Correia.

Espalhamento quântico unidimensional via mecânica quântica supersimétrica / Camila Correia Soares. - 2017.
90 f.

Orientador(a): Luis Rafael Benito Castro.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Física/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Espalhamento quântico. 2. Mecânica quântica. 3. Mecânica quântica supersimétrica. 4. Potenciais invariantes de forma. 5. Supersimetria. I. Castro, Luis Rafael Benito. II. Título.

CAMILA CORREIA SOARES

ESPALHAMENTO QUÂNTICO UNIDIMENSIONAL VIA MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal do Maranhão para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro

Aprovada em de de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Luis Rafael Benito Castro (Orientador)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Antonio Soares de Castro

Doutor em Física - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)

Prof^a. Gisele Bosso de Freitas

Doutora em Biofísica Molecular - Universidade Estadual da Região Tocantina do
Maranhão (UEMASUL)

Prof. Luis Enrique Arroyo Meza

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

São Luís

2017

*Dedico este trabalho aos doutores em educação,
mestres em sabedoria, especialistas em compreensão
e graduados em dignidade: Orlando Costa Soares
e Neide Euzébia Correia Soares, meus pais.*

AGRADECIMENTOS

Nesses quase dois anos de caminhada rumo ao título de mestre, deparei-me com situações que me puseram à prova. De ocorrências pessoais a profissionais. E este trabalho é o resultado de que todas elas foram aproveitadas com louvor, pois me fizeram crescer e amadurecer em todos os âmbitos. Para isso, contei com a ajuda de algumas pessoas e a elas darei meus sinceros agradecimentos.

Quero agradecer primeiramente a Deus, por ser Deus e eu pó, mas mesmo assim, sua filha. Agradeço imensamente aos meus pais, pelas orações e pelos sacrifícios desde o meu nascimento até os tempos atuais. Espero que eu esteja cumprindo pelo menos, o quinto mandamento da Bíblia.

Também quero agradecer ao Prof. Me. José do Nascimento Linhares, matemático por natureza, físico por paixão, professor por vocação, mas também meu namorado, noivo, amigo, companheiro e conselheiro. Foram suas conversas e incentivo que firmaram os meus pés, em momentos que o chão balançou, numa escala de 4,7 *Richter*.

Agradeço ao Programa de Pós Graduação em Física (PPGF), em especial à querida secretária, Lucy, pela assistência, presteza, educação e simpatia. Mesmo sendo encontros rápidos, saiba que foram muito agradáveis, pois me fizeram sentir em casa.

Não poderia deixar de agradecer à Maria, técnica em Laboratório de Física, que muito me auxiliou e ensinou nos manuseios dos materiais do Laboratório de Eletricidade, no período do meu Estágio Supervisionado.

Faço neste momento um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro. De forma cronológica agradeço-lhe por: ter me aceitado como orientanda, pelo trabalho proposto, pela credibilidade (coragem!), disposição, paciência (muita!), sinceridade, puxões de orelha (alguns injustos, conto uns três!), profissionalismo e acima de tudo, respeito e ética.

Por último, agradeço à FAPEMA e CAPES pelo apoio financeiro.

*“Voltei-me e vi debaixo do sol
que não é dos ligeiros a carreira,
nem dos fortes a batalha,
nem tampouco dos sábios o pão,
nem tampouco dos prudentes as riquezas,
nem tampouco dos entendidos o favor,
mas que o tempo e a oportunidade ocorrem a todos.”*

(Bíblia Sagrada, Eclesiastes 9. 11)

Resumo

Neste trabalho, estudamos o formalismo da mecânica quântica supersimétrica (MQS) partindo do método de fatoração do hamiltoniano do oscilador harmônico bosônico (OHB) por meio dos operadores escada e estendemos para o hamiltoniano de osciladores em geral, inclusive o oscilador harmônico fermiônico (OHF), com suas respectivas propriedades. Mostramos que a MQS, para estados ligados, associa hamiltonianos, potenciais e autovalores de energia de sistemas diferentes, que são denominados *parceiros supersimétricos*. No caso dos estados de espalhamento, observamos que a MQS aplica-se somente em *potenciais invariantes de forma* (PIFs). Apesar desta restrição, os PIFs são comumente utilizados na literatura, por sua larga aplicabilidade tanto na física de partículas quanto na matéria condensada. Sendo assim, estudamos os estados de espalhamento para o problema dos férmions relativísticos com massa sob influência do potencial de Pöschl-Teller modificado (PT), que é invariante de forma. Calculamos os coeficientes de transmissão (T) e reflexão (R), conhecendo apenas seu superpotencial, o que foi realizado de uma forma simples e elegante. Desse modo, o estudo do espalhamento quântico via MQS torna-se, uma ferramenta poderosa nos cálculos de T e R .

Abstract

In this work, we study the formalism of the supersymmetric quantum mechanics (SUSY QM) starting with hamiltonian factorization method of the bosonic harmonic oscillator (BHO) by means of ladders operators and we extended to hamiltonian of oscillators in general, inclusive of the fermionic harmonic oscillator (FHO), with their respective properties. We show that the SUSY QM for bound states, connect hamiltonians, potentials, and eigenvalues energy of different systems which are called *supersymmetric partners*. In the case scattering states, we notice that SUSY QM applies only in *shape invariant potentials* (SIPs). Despite this restriction, the SIPs are commonly used in literature by its wide applicability as in particles physics as in condensed matter. Therefore, we study the scattering states to the problem of massive relativistic fermions under the influence of modified Pöschl-Teller potential (PT), which is shape invariant. We calculate the transmission (T) and reflection (R) coefficients, just knowing the superpotential, which was carried out in a simple and elegant form. Thus, the study of the quantum scattering via SUSY QM becomes a powerful tool in the calculations of T and R .

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama dos estados correspondentes a H_1 e H_2	43
Figura 2 – Atuação dos operadores escada.	83

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Supersimetria: conceitos gerais	13
1.2	Da supersimetria à mecânica quântica supersimétrica	15
1.3	Estrutura do trabalho	17
2	EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER UNIDIMENSIONAL INDEPENDENTE DO TEMPO	19
2.1	Estados estacionários	19
2.2	Propriedades gerais do caso unidimensional	22
2.2.1	Independência linear entre autofunções: autovalores não degenerados	22
2.2.2	Propriedades necessárias às autofunções	23
2.3	Equação da continuidade na mecânica quântica	24
2.4	Estados ligados e estados de espalhamento	26
2.4.1	Espalhamento e estados ligados em potenciais localizados	26
3	MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA	36
3.1	Fatoração dos hamiltonianos: oscilador harmônico bosônico	36
3.1.1	Hierarquia dos hamiltonianos	43
3.2	O oscilador harmônico fermiônico	47
3.3	Oscilador harmônico supersimétrico	49
3.3.1	Geradores de supersimetria: hamiltoniano supersimétrico	52
3.4	Resolução da equação de Schrödinger via supersimetria	55
3.4.1	Poço quadrado infinito	55
3.5	Potenciais invariantes de forma	60
3.5.1	Fórmulas gerais para o espectro de estados ligados e funções de onda	60
4	ESPALHAMENTO QUÂNTICO UNIDIMENSIONAL VIA MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA	63
4.1	Amplitudes de espalhamento via MQS: formalismo	63
4.2	Amplitudes de espalhamento via MQS: aplicações	66
4.2.1	Potencial de Rosen-Morse simétrico	66
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
	REFERÊNCIAS	77

	APÊNDICES	81
	A – OPERADORES ESCADA BOSÔNICOS	82
	B – CONSTRUÇÃO DOS OPERADORES FERMIÔNICOS A PARTIR DOS OPERADORES DE SPIN 1/2	86
B.1	Campo magnético uniforme e as relações de comutação entre os operadores fermiônicos	88
	ANEXOS	90
	A – AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO DE POTENCIAIS INVARIANTES DE FORMA	91

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Supersimetria: conceitos gerais

Segundo [Cooper, Khare e Sukhatme \(2001\)](#), a supersimetria (SUSI) surgiu como uma resposta às tentativas dos físicos de obter uma descrição unificada de todas as interações básicas da natureza. Essa teoria relaciona estados bosônicos e fermiônicos, ou seja, combina estados (partículas) de spins inteiros e semi-inteiros em um multiplete¹ ([CHAICHIAN; HAGEDORN, 1997](#)). Os pioneiros desse conceito foram [Gol'fand e Likhtman \(1971\)](#), [Volkov e Akulov \(1973\)](#), e [Wess e Zumino \(1974\)](#), dando destaque ao último por apresentar o primeiro modelo supersimétrico de teoria quântica de campos em $(3 + 1)$ dimensões, denominado *Modelo de Wess-Zumino* ([CARMO, 2011](#)).

A conversão de um estado bosônico em um estado fermiônico, e vice-versa, é denominada *transformação supersimétrica* ([NETO, 2014](#)). Para melhor compreendê-la, tomemos como exemplo o que acontece em um núcleo de um átomo: o próton e o nêutron são convertidos constantemente um no outro, de modo que não podemos distingui-los fisicamente e assim, podemos considerá-los como dois estados possíveis de um único núcleon². Analogamente, a ideia de supersimetria assume que pode haver ambientes onde bósons e férmions tornam-se indistinguíveis. Eles devem ser vistos como membros de um único supermultiplete. Para que um sistema físico apresente uma SUSI, o estado fundamental do sistema deve ser invariante sob qualquer transformação supersimétrica ([JUNKER, 1996](#)).

Como mencionamos anteriormente, a SUSI é uma resposta às tentativas de descrever a natureza de forma unificada. Desse modo, uma outra motivação para estudar essa teoria é apresentada pela *teoria das cordas*, cuja presença de estados de cordas fermiônicos junto

¹ Conjunto de estados diferentes de uma mesma partícula elementar ou de energias muito próximas.

² Compõe o núcleo atômico e pode ser um próton ou um nêutron.

com bosônicos, impõe uma estrutura supersimétrica na teoria (GREEN; SCHWARZ; WITTEN, 1987 apud CHAICHIAN; HAGEDORN, 1997). Em *teorias de campo efetivas*³ que aproximam a teoria de cordas no domínio energético abaixo da massa de Planck, igual a 10^{19} GeV, esta estrutura se manifesta como uma supersimetria entre partículas (CHAICHIAN; HAGEDORN, 1997).

Outro exemplo é a relação entre as teorias de supergravidade⁴ com supersimetrias locais que unificam as teorias gravitacionais com as demais. Pois, a teoria de unificação da gravitação com outras teorias, deparam-se com um problema: comprovação experimental. Esperava-se que a escala de energia dos efeitos gravitacionais e quânticos pudessem ter intensidades comparáveis, estimadas a partir da massa de Planck⁵, ou seja

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19} \frac{\text{GeV}}{c^2} \approx 2,176 \times 10^{-8} \text{ kg}. \quad (1.1)$$

Uma partícula com essa massa possui o *raio de Schwarzschild*⁶, cuja fórmula é dada por (NETO, 2014)

$$r_p = \frac{2Gm_p}{c^2}, \quad (1.2)$$

igual a duas vezes o comprimento de onda de Compton (λ_c), que é a dimensão mínima de espaço onde tal partícula pode ser localizada. Explicando isso em números, temos que, ao substituir (1.1) em (1.2), o raio de Schwarzschild dessa partícula é

$$r_p = 2\lambda_c \approx 3,2 \times 10^{-35} \text{ m}. \quad (1.3)$$

Como esse raio deve ser proporcional à massa, observamos nesse caso, uma incompatibilidade nas ordens de grandeza de (1.1) e (1.2). E isso é um obstáculo, até agora não vencido, para as teorias de unificação (NETO, 2014).

Assim, a SUSI é um ingrediente necessário em qualquer unificação de interações da natureza, ou seja, interações fortes, eletrofracas e gravitacionais, pois, como já mencionamos anteriormente, pelas transformações supersimétricas, cada membro distinto é visto como um supermultiplete, que deve conter pelo menos um bóson e um férmion e possuir a mesma massa (CHAICHIAN; HAGEDORN, 1997; NETO, 2014). Além disso, o que faz a

³ As teorias de campo efetivas são o resultado de realizar uma descrição aproximada de algum objeto complexo (por exemplo, um núcleon ou mesmo um núcleo atômico). É válida abaixo de uma certa escala de energia (condição necessária para “não enxergar” graus de liberdade mais fundamentais), e geralmente serve para descrever só algumas características dos processos de interesse (HORVATH; ALLEN, 2007).

⁴ Teoria de campo que combina os princípios da supersimetria e relatividade geral.

⁵ Esta é a única expressão com dimensão de massa que pode ser formada a partir das constantes fundamentais \hbar , c e G (NETO, 2014).

⁶ O raio de Schwarzschild é um raio característico associado a todo corpo material. Este raio está associado à extensão do horizonte de eventos que haveria caso a massa de tal corpo fosse concentrada em um único ponto de dimensões infinitesimais. O raio de Schwarzschild é proporcional à massa, com uma constante de proporcionalidade envolvendo a constante gravitacional (G) e a velocidade da luz (c) (MELIA, 2003; SCHWARZSCHILD, 1999).

SUSI ser uma teoria bem construída e fundamentada, é a base algébrica que a envolve: a *álgebra de Lie graduada* ou *superálgebra*, que é assim denominada por incluir simetrias internas à *álgebra de Lie do grupo de Poincaré* de modo que além de comutadores, também há anticomutadores⁷. A parte da superálgebra que é incluída no grupo de Poincaré e que estabelece relações entre os geradores da SUSI, Q e Q^\dagger , e os geradores de translações no espaço-tempo, P_μ , é da forma (CARMO, 2011)

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} &= 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{Q_\alpha^\dagger, Q_\beta^\dagger\} = 0, \\ [P_\mu, Q_\alpha] &= [P_\mu, Q_\alpha^\dagger] = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

A SUSI, como falamos inicialmente, estabelece uma relação entre bósons e férmions. Isso faz com que partículas que diferem por $\frac{1}{2}$ no valor do spin, tenham a mesma massa. Tais partículas são denominadas de *parceiras supersimétricas*. Para melhor esclarecimento, tomemos como exemplo um fóton, que é um partícula bosônica, com spin inteiro 1 e massa de repouso nula. A previsão da SUSI é que existe um parceiro supersimétrico do fóton, ou seja, um férmion, de spin semi-inteiro $\frac{1}{2}$ e com massa de repouso nula denominado *fotino*. Todavia, tal partícula fermiônica, assim como todas as outras previstas pela SUSI, não foram detectadas até o presente momento.

Era de se esperar que o grande colisor de hádrons (LHC, do inglês *Large Hadron Collider*) detectasse alguma partícula supersimétrica, ainda que fosse o mais leve parceiro SUSI⁸, porém, não houve sucesso. Segundo Carmo (2011) e Neto (2014), a explicação para a não-detecção dos parceiros supersimétricos se dá pela quebra da supersimetria, onde tais parceiros previstos pela teoria, são muito mais pesados do que seus parceiros, bem mais leves.

1.2 Da supersimetria à mecânica quântica supersimétrica

Para explicar a quebra da supersimetria, Witten(1981, 1982) propôs dois trabalhos pioneiros em que estudou a SUSI unidimensional na mecânica quântica, sem trazer qualquer referência à teoria quântica de campos (NETO, 2014), o que foi e é, mais simples que a teoria original. A consequência disso, foi o surgimento de um novo campo de pesquisa denominado *mecânica quântica supersimétrica* (MQS).

⁷ Uma superálgebra é uma generalização da noção de álgebra de Lie, onde alguns dos geradores infinitesimais são fermiônicos, o que significa que algumas das regras de comutação são substituídas por regras de anticomutação (CHAICHIAN; HAGEDORN, 1997).

⁸ Na física de partículas, a partícula supersimétrica mais leve (LSP, do inglês *Lightest Supersymmetric Particle*) é um nome genérico dada à partícula hipotética mais leve descoberta nos modelos supersimétricos. A partícula supersimétrica mais leve é a melhor candidata a formar a matéria escura, sendo uma partícula com massa que interage fracamente (MCGUIRE; STEINHARDT, 2001).

O interesse pela MQS resultou em vários trabalhos, tais como, [Cooper, Ginocchio e Khare \(1987\)](#), [Cooper, Khare e Sukhatme \(2001\)](#), [Khare e Sukhatme \(1988\)](#), [Sukumar \(1985\)](#), entre outros, onde foi possível encontrar potenciais, hamiltonianos e operadores parceiros de forma simples e elegante, e ainda resolver a equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo para estados ligados e estados de espalhamento.

É importante ressaltar que, mesmo sendo estudada em uma dimensão, a MQS utiliza as principais ferramentas matemáticas da SUSI. Ou seja, a superálgebra ainda é obedecida, porém, com adaptações, sendo escrita na forma ([CARMO, 2011](#)):

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= 2H, \\ \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \\ [H, Q] &= [H, Q^\dagger] = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Além disso, a MQS considera uma simples realização da superálgebra envolvendo os operadores bosônico e fermiônico que obedecem as relações de comutação e anticomutação, respectivamente. O hamiltoniano para a MQS é uma matriz 2×2 que ao ser diagonalizada resulta em dois hamiltonianos cujos autovalores, autofunções e matriz S são relacionados por causa da existência dos operadores fermiônicos que comutam com o hamiltoniano. Essas relações podem ser exploradas para classificar problemas de potenciais analiticamente solúveis ([COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001](#)).

No ano de 1983, [Gendenshtein](#) introduziu o conceito de potencial invariante de forma (PIF) dentro da estrutura da mecânica quântica supersimétrica. Dizemos que um potencial é invariante de forma, quando seu parceiro supersimétrico possui a mesma dependência espacial do potencial original com parâmetros possivelmente alterados. Em seu trabalho, [Gendenshtein](#) mostra que para qualquer PIF os espectros de autovalores de energia poderiam ser obtidos algebricamente.

Anos mais tarde, foi dada uma lista de potenciais invariantes de forma (vide anexo [A](#)) e foi mostrado que suas autofunções e matriz de espalhamento também poderiam ser obtidas algebricamente ([COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001](#); [KHARE; SUKHATME, 1988](#)), o que traz vantagem, pois, sabendo que os PIFs são potenciais parceiros de um dado potencial, pelo método de fatoração dos hamiltonianos, podemos calcular as amplitudes de espalhamento de uma hierarquia de hamiltonianos⁹, conhecendo assim os coeficientes de reflexão e transmissão de todos os potenciais envolvidos.

Estudar estados de espalhamento é de grande relevância na física, tendo em vista que experimentos que os envolvem fornecem muito do conhecimento que possuímos hoje sobre a estrutura atômica, bem como a natureza das partículas e de suas interações

⁹ Conjunto de hamiltonianos gerados pelo método de fatoração dos operadores escada, que possuem os mesmos autovalores de energia e cujos potenciais são parceiros supersimétricos. Para mais detalhes, vide capítulo [3](#), seção [3.1](#).

(RIBEIRO et al., 2004). E todo esse estudo resume-se em calcular os coeficientes T e R , que são as probabilidades de uma partícula, ou feixe de partículas, ser transmitida ou refletida, respectivamente, ao incidir num determinado potencial.

Por exemplo, seja um feixe de partículas produzido por aceleradores de colisão ou oriundo de fontes radioativas incidindo num alvo (um cristal, grafeno¹⁰ ou uma placa de chumbo, por exemplo). Ao ser bombardeado pelo feixe, informações do material podem ser fornecidas pela interação entre as partículas e os constituintes do alvo. Isso se dá por conta das distribuições angular e de energia juntamente com a intensidade do feixe incidente (RIBEIRO et al., 2004). A partir dos dados obtidos pelo experimento, verifica-se em qual modelo teórico o potencial de interação se adequa.

Para melhor ilustração, temos os trabalhos de Eshghi e Mehraban (2016), Milpas, Torres e Murguía (2011), que estudam a dinâmica dos portadores de carga do grafeno sujeitos a um campo magnético, onde calculam os coeficientes T e R . No primeiro, é encontrada uma solução que descreve a função de onda incidente pela esquerda, e calculados estes coeficientes usando a equação de Riemann. No segundo, faz-se uso da mecânica quântica supersimétrica ao analisar a equação de Dirac correspondente ao campo magnético com perfil hiperbólico, a qual leva a um modelo de potencial exatamente solúvel, onde foram encontradas soluções analíticas compactas para as autofunções e autovalores de energia para elétrons e buracos e, conseqüentemente, permitiu encontrar os coeficientes de transmissão e reflexão.

Os trabalhos citados acima são apenas dois de inúmeros outros trabalhos que estudam estados de espalhamento. Calcular T e R torna-se relevante porque a partir dessas probabilidades podemos verificar fenômenos já apresentados na natureza, tais como o decaimento alfa dos núcleos em que um núcleo de Hélio (He) com energia abaixo da barreira do potencial Coulombiano tunela através dela.¹¹

1.3 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

- No capítulo 2, realizamos uma abordagem geral da mecânica quântica unidimensional pelo formalismo de Schrödinger, dando ênfase à equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo, onde estudamos as propriedades das funções de onda, estados ligados, estados de espalhamento e equação da continuidade. Finalizamos o

¹⁰ O grafeno é um material alotrópico do carbono, formado por uma monocamada de átomos de carbono arranjados em uma estrutura cristalina de favo de mel (ou *honeycomb*), podendo ser obtido por diversos métodos experimentais, sendo a esfoliação do grafite o modo mais simples (DARTORA; JIMENEZ; ZANELLA, 2015).

¹¹ Dizemos que a partícula tunelou, ou seja, mesmo com o potencial maior que sua energia, ela *pode* atravessá-lo. Mais detalhes, vide capítulo 2, seção 2.4.

capítulo com a resolução da equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo para um potencial simétrico localizado.

- Apresentamos no terceiro capítulo, o formalismo da MQS, partindo dos operadores escada de um oscilador harmônico bosônico (OHB), muito conhecido na literatura (GRIFFITHS, 2011; MESSIAH, 1958; SAKURAI; NAPOLITANO, 2013; ROBINETT, 1997), e generalizamos para um oscilador qualquer. Fizemos de forma análoga para o oscilador harmônico fermiônico (OHF) e verificamos como a superálgebra é vista naturalmente ao associar esses dois operadores (OHB e OHF). Tratamos também da hierarquia dos hamiltonianos e dos potenciais invariantes de forma. Finalizamos com a aplicação da MQS em estados ligados.
- No último capítulo, estudamos os estados de espalhamento via MQS, onde calculamos os coeficientes de transmissão (T) e reflexão (R) para o potencial de Pöschl-Teller modificado, que é invariante de forma, tendo em vista que o estudo de espalhamento via MQS restringe-se apenas à esse tipo de potencial. Logo após, realizamos uma aplicação no trabalho desenvolvido por Castro, Castro e Hott (2007), que estudaram apenas os estados ligados da equação de Dirac para férmions com massa, numa mistura de potenciais vetorial e escalar do tipo Pöschl-Teller modificado.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER UNIDIMENSIONAL INDEPENDENTE DO TEMPO

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar o formalismo de Schrödinger para a mecânica quântica não relativística, dando ênfase às propriedades da equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo. Em seguida, discutimos sobre estados ligados e estados de espalhamento, e apresentamos um formalismo matemático que analisa tais estados para um potencial simétrico localizado.

2.1 Estados estacionários

Classicamente, sabemos que a energia total de um sistema unidimensional é expressa como:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação (2.1) é a energia cinética, o segundo termo a energia potencial e H é denominada de *hamiltoniana*. Utilizando a substituição canônica $p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}$, (2.1) pode ser reescrita de forma que H torna-se:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (2.2)$$

sendo tal operador denominado *operador hamiltoniano*.

Operando \hat{H} sobre uma autofunção $\psi(x)$, temos

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.3)$$

sendo E o autovalor de energia de \hat{H} e representa a energia total do sistema.

Substituindo (2.2) em (2.3) chegamos a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.4)$$

onde (2.3) e (2.4) representam a *equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo*, cuja solução depende do tipo de potencial $V(x)$ utilizado.

A equação (2.4) pode ser obtida também, por meio do método de separação de variáveis, a partir da equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t), \quad (2.5)$$

que é denominada *equação de Schrödinger dependente do tempo em uma dimensão* cuja função de onda $\Psi(x, t)$ é reescrita na forma

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.6)$$

Segundo Griffiths (2011), a função de onda $\Psi(x, t)$ na forma separável, equação (2.6), apresenta três argumentos interessantes para que a mesma seja utilizada na resolução de (2.5):

1. As funções de onda **representam estados estacionários**. Isso é justificado quando calculamos a probabilidade e o valor esperado de um observável, em que se verifica a independência do tempo, isto é

$$|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x) e^{-iEt/\hbar}|^2 = |\psi(x)|^2, \quad (2.7)$$

$$\langle Q(x, p) \rangle = \int \psi^*(x) e^{iEt/\hbar} Q \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) e^{-iEt/\hbar} dx = \int \psi^*(x) Q \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx. \quad (2.8)$$

2. Pela equação (2.3), podemos concluir que as funções de onda representam **estados de energia total bem definida**. A justificativa é dada pelo cálculo do valor esperado de \hat{H} e sua variância, ou seja:

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \Psi^*(x, t) \hat{H} \Psi(x, t) dx,$$

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^*(x) e^{iEt/\hbar} \hat{H} \psi(x) e^{-iEt/\hbar} dx,$$

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^*(x) \underbrace{\hat{H} \psi(x)}_{E\psi(x)} dx,$$

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^*(x) E \psi(x) dx,$$

$$\langle \hat{H} \rangle = E \int |\psi(x)|^2 dx. \quad (2.9)$$

A integral em (2.9) fornece a probabilidade de encontrar a partícula em todo o espaço. Essa probabilidade é igual a 1, para garantir que a partícula seja encontrada em qualquer ponto deste intervalo. Isso é denominado de *normalização* que, matematicamente é:

$$\int |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (2.10)$$

e a equação (2.9) torna-se:

$$\langle \hat{H} \rangle = E. \quad (2.11)$$

Calculando $\langle \hat{H}^2 \rangle$ e $\langle \hat{H} \rangle^2$, temos:

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \int \psi^*(x) E^2 \psi(x) dx,$$

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = E^2, \quad (2.12)$$

e

$$\langle \hat{H} \rangle^2 = E^2. \quad (2.13)$$

Desse modo a variância de \hat{H} é dada como:

$$\sigma_H^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2,$$

$$\sigma_H^2 = E^2 - E^2,$$

$$\sigma_H^2 = 0. \quad (2.14)$$

Pelos resultados de (2.11) e (2.14) podemos afirmar que toda medição da energia total resulta no mesmo valor E , ou seja, não há dispersão em torno do valor médio. Logo, verificamos que as funções de onda representam estados de energia total bem definida;

3. A solução geral é uma **combinação linear de soluções separáveis**. Podemos verificar isso assumindo que

$$\Psi(x, t) = c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t) \quad (2.15)$$

também é uma solução da equação (2.5), onde c_1 e c_2 são constantes e $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$ são soluções linearmente independentes. Substituindo (2.15) em (2.5)

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t)] + V(x) [c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t)] = \\ = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1(x, t) + V(x) \Psi_1(x, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(x, t) \right] + \\ + c_2 \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_2(x, t) + V(x) \Psi_2(x, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2(x, t) \right] = 0. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Como $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$ são soluções, os termos entre colchetes de (2.16) são nulos. Isso confirma a linearidade da equação de Schrödinger e da função de onda. E assim, podemos estender a combinação linear para todas as funções de onda que são soluções da equação de Schrödinger com o mesmo potencial $V(x)$, ou seja

$$\Psi(x, t) = c_1\Psi_1(x, t) + c_2\Psi_2(x, t) + \dots + c_n\Psi_n(x, t) \quad (2.17)$$

ou

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.18)$$

2.2 Propriedades gerais do caso unidimensional

Na seção anterior, mencionamos que as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo (2.4) dependem da especificação do potencial $V(x)$. Além disso, as soluções devem ser fisicamente aceitáveis, pois representam os estados de uma partícula. Desse modo, antes de resolvermos a equação (2.4) para um determinado potencial, verificaremos suas principais propriedades.

2.2.1 Independência linear entre autofunções: autovalores não degenerados

Reescrevendo a equação (2.4) na forma

$$\psi''(x) + [E - V(x)]\psi(x) = 0, \quad (2.19)$$

onde, pelas unidades naturais $\hbar = 2m = 1$, vamos supor duas soluções de (2.19), ψ_1 e ψ_2 , que correspondem à mesma energia e mesmo potencial (GOZZI, 2012; LANDAU; LIFSHITZ, 1985). Isto é,

$$\frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} = E - V(x) = \frac{\psi_2''(x)}{\psi_2(x)}, \quad (2.20)$$

onde se chega a

$$\psi_1''(x)\psi_2(x) - \psi_1(x)\psi_2''(x) = 0. \quad (2.21)$$

Note que a equação (2.20) só faz sentido nas regiões onde ψ_1 e ψ_2 são diferentes de zero. Integrando (2.21) pela técnica de integração por partes

$$\psi_1'(x)\psi_2(x) - \int \psi_1'(x)\psi_2'(x)dx - \psi_1(x)\psi_2'(x) + \int \psi_1'(x)\psi_2'(x)dx = 0,$$

$$\psi_1'(x)\psi_2(x) - \psi_2'(x)\psi_1(x) = c, \quad (2.22)$$

onde c é uma constante.

A equação (2.22) é o negativo do wronskiano das funções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ que obedece ao seguinte corolário (MESSIAH, 1958):

Corolário 1. Se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são duas soluções da equação (2.19) que correspondem ao mesmo valor de energia E , seu wronskiano é independente de x .

Um wronskiano diferente de zero corresponde a funções linearmente independentes. No caso de (2.22) e pelo corolário acima, verificamos que $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, a princípio, possuem essa propriedade. Porém, no ponto $x = \pm\infty$, essas autofunções são nulas, conseqüentemente, c é nulo. Desse modo, (2.22) torna-se (LANDAU; LIFSHITZ, 1985; MESSIAH, 1958)

$$\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_2(x)\psi_1'(x) = 0, \quad (2.23)$$

ou seja, o wronskiano das autofunções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ é nulo e podemos afirmar que elas são linearmente dependentes. Reescrevemos (2.23) na forma

$$\frac{1}{\psi_1(x)}\psi_1'(x) = \frac{1}{\psi_2(x)}\psi_2'(x). \quad (2.24)$$

A única função cuja derivada resulta no produto entre o seu inverso e a sua derivada é a função logarítmica, logo, (2.24) é reescrita como

$$d(\ln \psi_1(x)) = d(\ln \psi_2(x)). \quad (2.25)$$

Integrando (2.25)

$$\int d(\ln \psi_1)dx = \int d(\ln \psi_2)dx,$$

que pode ser escrita como

$$\ln \psi_1(x) = \ln \psi_2(x) + c, \quad (2.26)$$

ou na forma

$$\psi_1(x) = \kappa\psi_2(x). \quad (2.27)$$

Desse modo, verificamos a dependência linear das autofunções. Isso serve de contraexemplo para afirmar que em um problema unidimensional com potenciais não-singulares, todos os níveis energéticos do espectro discreto são não degenerados (LANDAU; LIFSHITZ, 1985).

Em outras palavras, as autofunções são linearmente independentes, tal como a função de onda $\Psi(x, t)$, cuja demonstração foi apresentada no terceiro argumento da seção 2.1 e onde pudemos verificar pela equação (2.18), que para cada autofunção $\psi_n(x)$ há um autovalor de energia E_n correspondente, sendo n o número quântico principal que indica o nível de energia ou camada do elétron.

2.2.2 Propriedades necessárias às autofunções

A equação de Schrödinger independente do tempo é uma equação diferencial de segunda ordem cujas soluções dependem da especificação do potencial, como já falamos. Porém, nem todas as soluções obtidas são fisicamente aceitáveis. Para que as autofunções $\psi(x)$ e $\psi'(x)$ sejam fisicamente aceitáveis, elas devem ser:

- finitas;
- unívocas;
- contínuas.

Estas exigências são impostas para que as autofunções sejam funções bem comportadas matematicamente de modo que por meio delas, possamos calcular grandezas mensuráveis como $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$. Em outras palavras, tais propriedades fornecem a interpretação física das soluções.

O primeiro modo de obter soluções aceitáveis é fazendo a análise qualitativa de $\psi(x)$ e $\psi'(x)$. Para isso, reescrevemos (2.4) como

$$\psi''(x) = [V(x) - E] \psi(x), \quad (2.28)$$

onde a segunda derivada será definida em termos de $V(x)$, E e $\psi(x)$. Ou seja, vamos analisar o sinal do primeiro e do segundo termo do lado direito de (2.28) para um certo potencial com um dado valor de energia, e assim saber o sinal da segunda derivada de $\psi(x)$ (EISBERG; RESNICK, 1979; GOZZI, 2012). Dependendo deste sinal, a função terá um ponto de máximo (concavidade para baixo, quando $\psi'' < 0$) ou um ponto de mínimo (concavidade para cima, quando $\psi'' > 0$).

Assim, pelas propriedades impostas às autofunções para que sejam soluções aceitáveis e pelo estudo do sinal da segunda derivada da mesma, podemos ver quais soluções da equação (2.28) possuem interpretação física.

2.3 Equação da continuidade na mecânica quântica

Na física, existe uma lei de conservação expressa pela *equação da continuidade*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (2.29)$$

onde ρ é a densidade e J o fluxo ou corrente de uma dada grandeza (massa, carga, etc.).

Na teoria eletromagnética, por exemplo, ρ pode ser a densidade de carga e J é a densidade de corrente elétrica. Se cargas positivas saem de dentro de um volume V delimitado pela superfície A , temos que $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$. Tais cargas formam uma densidade de corrente que flui no sentido positivo, divergindo de A , ou seja $\nabla \cdot \vec{J} > 0$. Desse modo, a soma dos dois fatores é nula. Analogamente acontece quando as cargas positivas entram em V , pois, $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ e $\nabla \cdot \vec{J} < 0$, e assim, a soma dos dois fatores também é nula (MACHADO, 2002).

Na mecânica quântica, a equação da continuidade surge quando queremos examinar a probabilidade levando em consideração o movimento da partícula (FLEMING, s.d.). Isso

pode ser feito analisando a quantidade $|\Psi(x, t)|^2$, ou seja,

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\Psi^*(x, t)\Psi(x, t)] = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}. \quad (2.30)$$

Usando a equação (2.5) e sua complexa conjugada, onde estamos considerando apenas potenciais reais, temos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \\ -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^*, \end{aligned} \quad (2.31)$$

e em seguida substituindo (2.31) em (2.30), escrevemos

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right),$$

ou

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)}_J = 0,$$

ou ainda:

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (2.32)$$

onde (2.32) é a equação de continuidade no caso unidimensional.

Observamos então que a corrente de probabilidade é escrita como:

$$J = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (2.33)$$

Substituindo (2.6) em (2.33), encontramos

$$J = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi e^{-iEt/\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \psi^*(x) e^{iEt/\hbar} - \psi^*(x) e^{iEt/\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) e^{-iEt/\hbar} \right],$$

$$J = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^*(x) - \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \right],$$

ou

$$J = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \psi' - \psi'^* \psi), \quad (2.34)$$

da qual observamos a independência com relação a t . Contudo, ao derivarmos (2.34) com relação a x , encontramos:

$$J' = \left[\frac{\hbar}{2im} (\psi^* \psi' - \psi'^* \psi) \right]',$$

$$J' = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \psi'' - \psi \psi^{*''}). \quad (2.35)$$

Utilizando (2.19) e sua conjugada em (2.35):

$$J' = \frac{i}{\hbar} [V - E] [\psi^* \psi - \psi^* \psi] = 0. \quad (2.36)$$

Como a derivada de J é nula, temos que tal grandeza é constante e também independente de x , o que comprova a conservação da probabilidade.

2.4 Estados ligados e estados de espalhamento

Existem dois tipos de espectro de energia: o espectro discreto e o espectro contínuo. As características desses espectros vão depender se a energia total da partícula for menor ou maior que o potencial considerado, respectivamente.

Classicamente, se $E < V(x)$, a partícula sujeita a esse potencial encontra-se "presa" em seus limites, ou seja, ela oscila entre os pontos de retorno clássico (quando $E = V(x)$). Nesse caso, a função $\psi(x)$ representa um *estado ligado*.

Se $E > V(x)$, em um lado do eixo x ou em ambos os lados, a partícula acelera ou desacelera sob a influência do potencial e volta ao infinito. Nesse caso, $\psi(x)$ representa um *estado de espalhamento*.

No domínio quântico, temos ainda o fenômeno do *tunelamento*, onde a partícula "escapa" de qualquer barreira de potencial finita, fazendo com que a única propriedade relevante seja o potencial no infinito. (GRIFFITHS, 2011). Resumindo:

$$\begin{aligned} E < V(\pm\infty) &\Rightarrow \text{estado ligado (espectro discreto de energia),} \\ E > V(\pm\infty) &\Rightarrow \text{estado de espalhamento (espectro contínuo de energia).} \end{aligned} \quad (2.37)$$

O critério fica ainda mais simples quando consideramos os potenciais se anulando no infinito, já que eles têm mais aplicações na física. Ou seja:

$$\begin{aligned} E < 0 &\Rightarrow \text{estado ligado (espectro discreto de energia),} \\ E > 0 &\Rightarrow \text{estado de espalhamento (espectro contínuo de energia).} \end{aligned} \quad (2.38)$$

A partir das definições de estados ligados e estados de espalhamento, vamos apresentar a seguir um formalismo matemático que permite abordar tais estados de uma forma unificada. Esse formalismo é apresentado por Castro (2011).

2.4.1 Espalhamento e estados ligados em potenciais localizados

Considerando um potencial localizado simétrico definido como

$$V(x) = \begin{cases} \vartheta(x), & -L < x < L, \\ 0, & x < -L, \quad x > L. \end{cases} \quad (2.39)$$

A partir de (2.39), temos três soluções para a equação (2.28), ou seja,

- **região** $x < -L$. A solução é expressa na forma

$$\psi_I = a_+ e^{ikx} + a_- e^{-ikx}, \quad (2.40)$$

onde k é o número de onda definido por

$$k = \sqrt{E}. \quad (2.41)$$

Sendo $E > 0$, a solução (2.40) nada mais é que a soma de autofunções do operador momento, e^{ikx} e e^{-ikx} (DONAGELO; CAPAZ, 2009). Essas autofunções, descrevem ondas planas que se propagam em ambos os sentidos do eixo x com velocidade de grupo expressa como (GRIFFITHS, 2011 apud CASTRO, 2011)

$$v_g = \frac{dE}{dk}, \quad (2.42)$$

onde $a_+ e^{ikx}$ descreve as partículas incidentes ($v_g > 0$) e $a_- e^{-ikx}$ descreve as partículas refletidas ($v_g < 0$), sendo a_+ denominada *amplitude de onda incidente* e a_- a *amplitude de onda refletida*.

- **Região** $-L < x < L$. A solução nessa região é expressa na forma

$$\psi_{II} = c_1 u(x) + c_2 v(x). \quad (2.43)$$

Tal solução é assim escrita, pois, mesmo não tendo o potencial definido, podemos lembrar do terceiro argumento da seção 2.1, onde, se u e v , da equação (2.28), são soluções linearmente independentes, sua combinação linear também é solução da mesma, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Além disso, $\vartheta(x)$ é um potencial par, ou seja, $\vartheta(-x) = \vartheta(x)$, para que se possa obter a solução da equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo como uma combinação linear de funções u e v que são soluções par e ímpar, respectivamente, e também funções reais.

- **Região** $x > L$. A solução é expressa na forma

$$\psi_{III} = b_+ e^{ikx} + b_- e^{-ikx}, \quad (2.44)$$

onde b_+ é a *amplitude de onda transmitida* e b_- é a *amplitude de onda refletida*. No entanto, pelas mesmas razões da solução (2.40), a segunda parcela de (2.44) é nula, pois não temos onda se propagando da direita para a esquerda, ou seja, se aproximando do potencial, pois estamos assumindo que as partículas incidem do $-\infty$. Desse modo, temos

$$\psi_{III} = b_+ e^{ikx}. \quad (2.45)$$

As soluções (2.40), (2.43) e (2.45) nos permite calcular a corrente de probabilidade J expressa por (2.34). Ou seja,

- **região** $x < -L$. A autofunção, sua complexa conjugada e suas respectivas derivadas são expressas na forma

$$\begin{aligned}\psi_I &= a_+ e^{ikx} + a_- e^{-ikx}, \\ \psi_I^* &= a_+ e^{-ikx} + a_- e^{ikx}, \\ \psi_I' &= ik a_+ e^{ikx} - ik a_- e^{-ikx}, \\ \psi_I^{*'} &= -ik a_+ e^{-ikx} + ik a_- e^{ikx},\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}J_I &= \frac{\hbar}{2im} [(a_+ e^{-ikx} + a_- e^{ikx}) (ik a_+ e^{ikx} - ik a_- e^{-ikx})] \\ &\quad - \frac{\hbar}{2im} [(-ik a_+ e^{-ikx} + ik a_- e^{ikx}) (a_+ e^{ikx} + a_- e^{-ikx})],\end{aligned}$$

ou

$$J_I = \frac{\hbar k}{m} |a_+|^2 - \frac{\hbar k}{m} |a_-|^2. \quad (2.46)$$

Contudo, a corrente total nesta região do espaço é expressa como

$$J_I = J_{inc} - J_{ref}. \quad (2.47)$$

Comparando (2.46) com (2.47), encontramos

$$\begin{aligned}J_{inc} &= \frac{\hbar k}{m} |a_+|^2, \\ J_{ref} &= \frac{\hbar k}{m} |a_-|^2.\end{aligned} \quad (2.48)$$

- **Região** $-L < x < L$. A autofunção, sua complexa conjugada e suas respectivas derivadas são expressas na forma

$$\begin{aligned}\psi_{II} &= c_1 u + c_2 v, \\ \psi_{II}^* &= c_1^* u + c_2^* v, \\ \psi_{II}' &= c_1 u' + c_2 v', \\ \psi_{II}^{*'} &= c_1^* u' + c_2^* v',\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}J_{II} &= \frac{\hbar}{2im} [(c_1^* u + c_2^* v) (c_1 u' + c_2 v')] \\ &\quad - \frac{\hbar}{2im} [(c_1^* u' + c_2^* v') (c_1 u + c_2 v)],\end{aligned}$$

ou

$$J_{II} = \frac{\hbar}{2im} [c_1^* c_2 (u v' - u' v) + c_1 c_2^* (u' v - u v')]. \quad (2.49)$$

Sabendo que o wronskiano de u e v é expresso como

$$w(u, v) = uv' - u'v. \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) em (2.49)

$$\begin{aligned} J_{II} &= \frac{\hbar}{2im} [c_1^* c_2 w(u, v) - c_1 c_2^* w(u, v)], \\ J_{II} &= \frac{\hbar}{2im} w(u, v) (c_1^* c_2 - c_1 c_2^*), \\ J_{II} &= \frac{\hbar}{m} w(u, v) \text{Im}(c_1^* c_2). \end{aligned} \quad (2.51)$$

- **Região $x > L$.** A autofunção, sua complexa conjugada e suas respectivas derivadas são expressas na forma

$$\begin{aligned} \psi_{III} &= b_+ e^{ikx}, \\ \psi_{III}^* &= b_+ e^{-ikx}, \\ \psi'_{III} &= ikb_+ e^{ikx}, \\ \psi_{III}^{*'} &= -ikb_+ e^{-ikx}, \end{aligned}$$

de modo que

$$J_{III} = J_{trans} = \frac{\hbar}{2im} [b_+ e^{-ikx} ikb_+ e^{ikx} + ikb_+ e^{-ikx} b_+ e^{ikx}],$$

ou

$$J_{trans} = \frac{\hbar k}{m} |b_+|^2. \quad (2.52)$$

A partir de (2.48) e (2.52), podemos calcular grandezas de suma importância para a descrição do espalhamento (CASTRO, 2011): os coeficientes de reflexão (R) e de transmissão (T). O primeiro é a probabilidade relativa de que uma partícula incidente seja refletida e o segundo é a probabilidade de transmissão (GRIFFITHS, 2011). Tais coeficientes são expressos como

$$\begin{aligned} R &= \frac{J_{ref}}{J_{inc}}, \\ T &= \frac{J_{trans}}{J_{inc}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo (2.48) e (2.52) em (2.53), encontramos

$$\begin{aligned} R &= \frac{|a_-|^2}{|a_+|^2}, \\ T &= \frac{|b_+|^2}{|a_+|^2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Podemos encontrar os valores das amplitudes a_+ , a_- e b_+ por meio das condições de continuidade de ψ e ψ' . Deste modo:

- **região** $x = -L$. Igualamos ψ_I com ψ_{II} assim como suas respectivas derivadas da forma

$$\psi_I|_{x=-L} = \psi_{II}|_{x=-L},$$

$$\psi'_I|_{x=-L} = \psi'_{II}|_{x=-L},$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_+e^{-ikL} + a_-e^{ikL} &= c_1u_L - c_2v_L, \\ ika_+e^{-ikL} - ika_-e^{ikL} &= -c_1u'_L + c_2v'_L, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde faremos uso de (2.55) posteriormente.

- **para** $x = L$. Igualamos ψ_{II} com ψ_{III} assim como suas respectivas derivadas da forma

$$\psi_{III}|_{x=L} = \psi_{II}|_{x=L}$$

$$\psi'_{III}|_{x=L} = \psi'_{II}|_{x=L}$$

de modo que

$$\begin{aligned} b_+e^{ikL} &= c_1u_L - c_2v_L, \\ ikb_+e^{ikL} &= c_1u'_L + c_2v'_L, \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que, pela notação de Castro (2011), o subscrito L em u e v significa avaliação em $x = \pm L$.

Reescrevendo a segunda equação em (2.55) na forma

$$a_+e^{-ikL} - a_-e^{ikL} = \frac{-i}{k} (-c_1u'_L + c_2v'_L) \quad (2.57)$$

e somando com a primeira equação de (2.55), temos

$$2a_+e^{-ikL} = c_1 \left(u_L + \frac{i}{k} u'_L \right) - c_2 \left(v_L + \frac{i}{k} v'_L \right). \quad (2.58)$$

Do mesmo modo, a segunda equação de (2.56) como

$$b_+e^{ikL} = \frac{1}{ik} (c_1u'_L + c_2v'_L) \quad (2.59)$$

e somando com a primeira equação de (2.56), resulta em

$$2b_+e^{ikL} = c_1 \left(u_L - \frac{i}{k} u'_L \right) + c_2 \left(v_L - \frac{i}{k} v'_L \right). \quad (2.60)$$

Agora, somando (2.58) com (2.60)

$$a_+e^{-ikL} + b_+e^{ikL} = c_1u_L - \frac{i}{k}c_2v'_L \quad (2.61)$$

e subtraindo (2.59) de (2.61) chegamos a

$$\frac{c_1}{a_+} = -\frac{ike^{-ikL}}{u'_L - iku_L}. \quad (2.62)$$

Subtraindo (2.60) de (2.58)

$$a_+e^{-ikL} - b_+e^{ikL} = -\frac{1}{ik}c_1u'_L - c_2v_L \quad (2.63)$$

e somando (2.63) com (2.59) obtemos

$$\frac{c_2}{a_+} = \frac{ike^{-ikL}}{v'_L - ikv_L}. \quad (2.64)$$

Isolando c_1 e c_2 em (2.62) e (2.64), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{ike^{-ikL}}{u'_L - iku_L}a_+ \\ c_2 &= \frac{ike^{-ikL}}{v'_L - ikv_L}a_+ \end{aligned} \quad (2.65)$$

e substituindo em (2.57) e em (2.59), chegamos a

$$\frac{a_-}{a_+} = -\frac{e^{-2ikL}(k^2u_Lv_L + u'_Lv'_L)}{(u'_L - iku_L)(v'_L - ikv_L)}, \quad (2.66)$$

$$\frac{b_+}{a_+} = -\frac{ike^{-2ikL}w}{(u'_L - iku_L)(v'_L - ikv_L)}. \quad (2.67)$$

Utilizando (2.66) e (2.67) podemos reescrever os coeficientes de reflexão e transmissão, (2.54), como

$$R = \frac{(k^2u_Lv_L + u'_Lv'_L)^2}{(k^2u_Lv_L - u'_Lv'_L)^2 + k^2(u'_Lv_L + u_Lv'_L)^2}, \quad (2.68)$$

$$T = \frac{k^2w^2}{(k^2u_Lv_L - u'_Lv'_L)^2 + k^2(u'_Lv_L + u_Lv'_L)^2}. \quad (2.69)$$

Substituindo (2.50) em (2.69) e somando esta com (2.68) temos

$$R + T = 1, \quad (2.70)$$

que confirma a conservação da probabilidade (CASTRO, 2011).

Vimos que o formalismo acima é eficiente para a análise de estados de espalhamento de uma potencial simétrico qualquer. No entanto, segundo Castro (2011) estados ligados também podem ser analisados por tal formalismo. Basta escrevermos $k = i|k|$ onde $|k| = \sqrt{|E|}$, sendo $E < 0$. Isso faz com que as soluções nas regiões *I*, *II* e *III* sejam

$$\begin{aligned} \psi_I &= a_+e^{-|k|x} + a_-e^{|k|x}, \text{ em } x < -L, \\ \psi_{II} &= c_1u + c_2v, \text{ em } -L < x < L, \\ \psi_{III} &= b_+e^{-|k|x} + b_-e^{|k|x}, \text{ em } x > L. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para $x \rightarrow -\infty$ devemos impor que a_+ seja nula evitando assim uma solução infinita. De forma análoga, quando $x \rightarrow +\infty$, $b_- = 0$. Desse modo, (2.71) é reescrito como

$$\begin{aligned}\psi_I &= a_- e^{|k|x}, \text{ em } x < -L, \\ \psi_{II} &= c_1 u + c_2 v, \text{ em } -L < x < L, \\ \psi_{III} &= b_+ e^{-|k|x}, \text{ em } x > L.\end{aligned}\tag{2.72}$$

Utilizaremos a mesma consideração, $k = i|k|$, para reescrever (2.55) e (2.56)

$$a_- e^{-|k|L} = c_1 u_L - c_2 v_L,\tag{2.73}$$

$$|k| a_- e^{-|k|L} = -c_1 u'_L + c_2 v'_L,\tag{2.74}$$

$$b_+ e^{-|k|L} = c_1 u_L - c_2 v_L,\tag{2.75}$$

$$-|k| b_+ e^{-|k|L} = c_1 u'_L + c_2 v'_L.\tag{2.76}$$

Reescrevendo (2.74) na forma

$$a_- e^{-|k|L} = \frac{1}{|k|} (-c_1 u'_L + c_2 v'_L)\tag{2.77}$$

e substituindo (2.77) em (2.73), considerando $c_2 = 0$, para que se tenha apenas a função par, temos

$$u'_L + |k| u_L = 0.\tag{2.78}$$

Isolando $|k|$ em (2.78)

$$|k| = -\frac{u'_L}{u_L}.\tag{2.79}$$

Substituindo (2.79) em (2.73), e, da mesma forma, com $c_2 = 0$:

$$a_- = c_1 u_L e^{-\frac{u'_L}{u_L} L}.\tag{2.80}$$

Reescrevendo (2.76) na forma

$$b_+ e^{-|k|L} = -\frac{1}{|k|} (c_1 u'_L + c_2 v'_L)\tag{2.81}$$

substituindo (2.81) em (2.75), com $c_2 = 0$, temos

$$u'_L + |k| u_L = 0\tag{2.82}$$

e

$$|k| = -\frac{u'_L}{u_L}.\tag{2.83}$$

Substituindo (2.83) em (2.75) com $c_2 = 0$,

$$b_+ = c_1 u_L e^{-\frac{u'_L}{u_L} L}. \quad (2.84)$$

Concluimos, então, que

$$a_- = b_+ = c_1 u_L e^{-\frac{u'_L}{u_L} L}. \quad (2.85)$$

Considerando agora $c_1 = 0$, para que se tenha apenas função ímpar, em (2.73) e repetindo todo o processo acima, chegamos a

$$v'_L + |k|v_L = 0, \quad (2.86)$$

$$a_- = b_+ = c_2 v_L e^{-\frac{v'_L}{v_L} L}. \quad (2.87)$$

Isolando c_1 de (2.85) e c_2 de (2.87), temos que

$$c_1 = \frac{b_+}{u_L} e^{\frac{u'_L}{u_L} L}, \quad (2.88)$$

$$c_2 = -\frac{b_+}{v_L} e^{\frac{v'_L}{v_L} L}. \quad (2.89)$$

Segundo Castro (2011), as autofunções correspondentes às equações (2.82), (2.85), (2.86) e (2.87) podem ser escritas como

- para ψ par

$$\psi(x) = b_+ \begin{cases} e^{|k|x} & \text{para } x < -L, \\ \frac{e^{-|k|L}}{u_L} u(x) & -L < x < L, \\ e^{-|k|x} & \text{para } x > L; \end{cases} \quad (2.90)$$

- para ψ ímpar

$$\psi(x) = b_+ \begin{cases} -e^{|k|x} & \text{para } x < -L, \\ \frac{e^{-|k|L}}{v_L} v(x) & -L < x < L, \\ e^{-|k|x} & \text{para } x > L. \end{cases} \quad (2.91)$$

Assim, segundo Castro (2011), os problemas de estados de espalhamento e estados ligados estão formalmente resolvidos. A seguir, utilizaremos o formalismo para o caso de um potencial retangular.

O potencial quadrado

Considerando o potencial

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{para } -L < x < L, \\ 0 & \text{para } |x| > L \end{cases} \quad (2.92)$$

a equação (2.28) é reescrita como

$$\psi'' = (V_0 - E)\psi \quad \text{para} \quad -L < x < L. \quad (2.93)$$

Segundo Castro (2011), os casos $E > V_0$ e $E < V_0$ correspondem respectivamente, a q real e q imaginário e conduzem a duas classes de soluções diferentes. Desse modo:

- **caso** $E > V_0$. A solução nesse caso é da forma

$$\psi_{II} = e^{-iqx} + e^{iqx}, \quad (2.94)$$

em que, para $x \rightarrow -\infty$, o primeiro termo é nulo. Logo:

$$\psi_{II} = e^{iqx},$$

ou

$$\psi_{II} = \cos(qx) + i \operatorname{sen}(qx), \quad (2.95)$$

onde:

$$u = \cos(qx), \quad (2.96)$$

$$v = \operatorname{sen}(qx).$$

Substituindo (2.96) em (2.50), temos

$$w = q. \quad (2.97)$$

Substituindo agora, (2.96) e (2.97) em (2.69), obtemos

$$T = \left\{ 1 + \left[\frac{k^2 - q^2}{2kq} \operatorname{sen}(2qL) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (2.98)$$

por fim, substituindo (2.96) em (2.82) e em (2.86)

$$-q \operatorname{sen}(qL) + |k| \cos(qL) = 0 \quad (2.99)$$

$$q \cos(qL) + |k| \operatorname{sen}(qL) = 0.$$

Isolando $|k|$ e q nas duas expressões de (2.99), chegamos a:

$$\frac{|k|}{q} = \begin{cases} \operatorname{tg}(qL) & \text{para } c_2 = 0, \\ -\operatorname{cot}(qL) & \text{para } c_1 = 0. \end{cases} \quad (2.100)$$

Segundo Castro (2011), o coeficiente de transmissão é válido somente para $E > 0$, porém, as condições de quantização são válidas somente para $E < 0$. Com tais condições, V_0 é obrigatoriamente negativo. Ou seja, temos um poço de potencial.

- **caso** $E < V_0$. A solução nesse caso é da forma

$$\psi_{II} = e^{|q|x} + e^{-|q|x}. \quad (2.101)$$

Quando $x \rightarrow -\infty$, temos

$$\psi_{II} = e^{|q|x},$$

ou

$$\psi_{II} = \cosh(|q|x) + \sinh(|q|x), \quad (2.102)$$

onde

$$u = \cosh(|q|x) \quad (2.103)$$

$$v = \sinh(|q|x).$$

Substituindo (2.103) e (2.50), obtemos

$$w = |q|. \quad (2.104)$$

Agora, substituindo (2.103) e (2.104) em (2.69), encontramos

$$T = \left\{ 1 + \left[\frac{k^2 + |q|^2}{2k|q|} \sin(2|q|L) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (2.105)$$

Neste caso, como $0 < E < V_0$, temos o tunelamento, já explicado na seção 2.4. Substituindo (2.103) em (2.82) e em (2.86), e isolando $|k|$ e $|q|$, chegamos a

$$-\frac{|k|}{|q|} = \begin{cases} \operatorname{tgh}(|q|L) & \text{para } c_2 = 0, \\ \operatorname{coth}(|q|L) & \text{para } c_1 = 0. \end{cases} \quad (2.106)$$

Notemos que o lado esquerdo de (2.106) é negativo. A consequência é que as condições de quantização desta equação, não fornecem soluções. Isso significa que para que se tenha estados ligados, q deve ser real na região do potencial e $E > V_0$ (CASTRO, 2011).

Neste capítulo, pudemos apresentar de forma sucinta as propriedades gerais da equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo, além de explorar os estados ligados e estados de espalhamento de forma unificada com um formalismo matemático acessível. Esses últimos são importantes para o presente trabalho, tendo em vista que os exploraremos novamente, via mecânica quântica supersimétrica, cujo formalismo será estudado no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA

Neste capítulo, apresentamos o formalismo da mecânica quântica supersimétrica (MQS), partindo do método de fatoração do hamiltoniano do oscilador harmônico bosônico (OHB), por meio dos operadores escada. Aplicamos esse método para um hamiltoniano arbitrário e verificamos a existência de hamiltonianos e potenciais parceiros supersimétricos, objetos de estudo da MQS. Além disso, estudamos a álgebra do oscilador harmônico fermiônico (OHF) e sua relação com o OHB, formando assim os geradores de supersimetria. Finalizamos o capítulo com a resolução da equação de Schrödinger para o poço quadrado infinito via MQS.

3.1 Fatoração dos hamiltonianos: oscilador harmônico bosônico

No capítulo anterior, afirmamos que a equação de Schrödinger independente do tempo de uma única partícula é resolvida conhecendo o seu potencial $V(x)$. Um exemplo clássico, é o oscilador harmônico bosônico (OHB), cujo hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (3.1)$$

onde m é a massa, p é o momento linear, ω é a frequência angular e x é a posição da partícula, com

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (3.2)$$

sendo o seu potencial.

Uma das formas de resolver a equação de Schrödinger¹ para esse potencial, (3.2), é utilizando o *método de fatoração do hamiltoniano*, onde expressamos o hamiltoniano do OHB como produto de dois operadores não-hermitianos², a e a^\dagger (operador aniquilação e

¹ A partir desse capítulo vamos nos referir à equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo apenas como equação de Schrödinger, salvo notação em contrário.

² Um operador é dito hermitiano se $X = X^\dagger$, caso contrário, se $X \neq X^\dagger$, o operador é dito não-hermitiano.

criação, respectivamente), denominados de *operadores escada* (mais detalhes sobre estes operadores, vide apêndice A) e definidos como (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013):

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad (3.3)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right), \quad (3.4)$$

onde x e p são, respectivamente, os operadores posição e momento. Esses observáveis não são compatíveis, ou seja, não podemos ter autovetores simultâneos do mesmos e a medida de um interfere na medida do outro. Desse modo, a relação de comutação entre eles é expressa como

$$[x, p] = i\hbar. \quad (3.5)$$

Realizando o produto entre a^\dagger e a

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \\ a^\dagger a &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{i}{m\omega} \underbrace{[x, p]}_{i\hbar} + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right), \\ a^\dagger a &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} - \frac{\hbar}{m\omega} \right), \\ a^\dagger a &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \right) - \frac{1}{2}, \\ a^\dagger a &= \frac{1}{\hbar\omega} \underbrace{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)}_H - \frac{1}{2}, \\ a^\dagger a &= H - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se fizermos aa^\dagger , ficamos com

$$aa^\dagger = H + \frac{1}{2}. \quad (3.7)$$

Por questão de simplificação, utilizamos as unidades naturais onde $\hbar = \omega = 1$, e assim temos:

$$H = \frac{1}{2} \left(mx^2 + \frac{p^2}{m} \right), \quad (3.8)$$

$$a = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(x + i\frac{p}{m} \right), \quad (3.9)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(x - i\frac{p}{m} \right). \quad (3.10)$$

Agora vamos calcular as relações: $[a, a^\dagger]$, $[a^\dagger, a]$, $[a^\dagger, a^\dagger]$, $[a, a]$, $\{a, a^\dagger\}$, $\{a^\dagger, a\}$, $\{a^\dagger, a^\dagger\}$, $\{a, a\}$. Temos então,

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.11):

$$[a, a^\dagger] = H + \frac{1}{2} - H + \frac{1}{2}$$

ou

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.12)$$

Analogamente para $[a^\dagger, a]$, temos

$$[a^\dagger, a] = -1. \quad (3.13)$$

Calculando $[a^\dagger, a^\dagger]$ e $[a, a]$:

$$[a^\dagger, a^\dagger] = a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a^\dagger = 0; \quad [a, a] = aa - aa = 0. \quad (3.14)$$

Calculando $\{a, a^\dagger\}$ e $\{a^\dagger, a\}$:

$$\{a, a^\dagger\} = aa^\dagger + a^\dagger a. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.15), encontramos

$$\{a, a^\dagger\} = H + \frac{1}{2} + H - \frac{1}{2},$$

$$\{a, a^\dagger\} = 2H \quad (3.16)$$

ou

$$\{a^\dagger, a\} = 2H. \quad (3.17)$$

Calculando $\{a^\dagger, a^\dagger\}$ e $\{a, a\}$:

$$\{a^\dagger, a^\dagger\} = 2a^\dagger a^\dagger, \quad \{a, a\} = 2aa. \quad (3.18)$$

Podemos ainda, definir um operador N como

$$N = a^\dagger a, \quad (3.19)$$

conhecido como *operador número*³. Assim, escrevemos (3.6) como:

$$H = N + \frac{1}{2}. \quad (3.20)$$

Observamos em (3.20) que o operador hamiltoniano nada mais é do que uma função linear em N , e por esse motivo, temos que

$$[H, N] = 0. \quad (3.21)$$

³ Mais detalhes sobre este operador, vide apêndice A.

Isso nos permite escrever estados simultâneos aos dois operadores. Podemos definir n como sendo o autovalor do operador número e aplicá-lo em um autoestado $|n\rangle$, dado por:

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (3.22)$$

Aplicando H em $|n\rangle$ e utilizando (3.22), temos

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= \left(N + \frac{1}{2}\right) |n\rangle, \\ H|n\rangle &= \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right)}_{E_n} |n\rangle, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$E_n = n + \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

é o autovalor de energia do OHB. Assim, verificamos que a fatoração do hamiltoniano de um oscilador nos permite de forma elegante, chegar nos autovalores de energia. Além disso, desde que (3.6) e (3.7) diferem por uma constante, podemos escrever H como, seguindo a definição da literatura (CARMO, 2011; COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; FILHO, 2009; FREITAS, 2008)

$$H_1 = a^\dagger a, \quad H_2 = a a^\dagger. \quad (3.25)$$

Por conseguinte, podemos fatorar um hamiltoniano qualquer de forma análoga à (3.25), que é o ponto de partida para o estudo da MQS, ou seja (NETO, 2014):

$$H_1 = A^\dagger A, \quad H_2 = A A^\dagger. \quad (3.26)$$

onde A e A^\dagger , são também operadores não-hermitianos também denominados de operadores de aniquilação e criação, expressos da forma:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (3.27)$$

onde a função $W(x)$ é denominada de *superpotencial* na MQS. A utilização de (3.26) e (3.27) será feita em breve. Mas antes, vamos resolver a equação (2.4) considerando que a autofunção $\psi(x)$ já está definida de modo que o nosso objetivo é encontrar o potencial $V(x)$ ⁴. Desse modo, seja a autofunção no estado fundamental, que é adequada para o nosso caso, pois não tem nó e desaparece em $\pm\infty$, o que resulta numa solução finita (normalizável). Consideramos tal estado, E_0 , do hamiltoniano H de (2.2) nulo. Assim, aplicando (2.2) a uma autofunção $\psi_0(x)$, temos

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} + V(x)\psi_0(x) = 0,$$

⁴ Essa é uma das duas formas de se trabalhar com a MQS, o outro modo, é análogo ao que fizemos no capítulo 2, onde o potencial já é conhecido, mas neste caso, obtemos a autofunção do estado fundamental.

$$\begin{aligned}
V(x)\psi_0(x) &= \frac{1}{2m} \frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2}, \\
V(x) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\psi_0(x)} \underbrace{\frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2}}_{\psi_0''(x)}, \\
V(x) &= \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}, \tag{3.28}
\end{aligned}$$

onde (3.28) é o potencial a ser definido a partir da autofunção no estado fundamental.

Agora, aplicando a primeira expressão de (3.26) em uma função qualquer $f(x)$, onde:

$$H_1 f(x) = A^\dagger A f(x) \tag{3.29}$$

e depois usando (2.2) e (3.27), escrevemos

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)\right) f(x) &= \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right) \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right) f(x), \\
-\frac{d^2}{dx^2} f(x) + V_1(x) f(x) &= \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right) \left(\frac{d}{dx} f(x) + W(x) f(x)\right), \\
-\frac{d^2}{dx^2} f(x) + V_1(x) f(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} f(x) - \frac{d}{dx} [W f(x)] + W(x) \frac{d}{dx} f(x) + W^2(x) f(x), \\
-\frac{d^2}{dx^2} f(x) + V_1(x) f(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} W(x) - \underbrace{W(x) \frac{d}{dx} f(x) + W(x) \frac{d}{dx} f(x)}_0 \\
&\quad + W^2(x) f(x), \\
-\frac{d^2}{dx^2} f(x) + V_1(x) f(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} W(x) + W^2(x) f(x), \\
V_1(x) f(x) &= -f(x) \frac{d}{dx} W(x) + W^2(x) f(x), \\
V_1(x) &= -\frac{d}{dx} W(x) + W^2(x),
\end{aligned}$$

temos:

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{d}{dx} W(x). \tag{3.30}$$

Se aplicarmos a segunda expressão em (3.26) a uma função qualquer $f(x)$, de forma análoga, obtemos:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{d}{dx} W(x), \tag{3.31}$$

onde $V_1(x)$ e $V_2(x)$ são denominados *potenciais parceiros*. Podemos resolver tanto (3.30) como (3.31) com a exigência de que

$$A\psi_0 = 0 \tag{3.32}$$

satisfaz. Logo,

$$H_1\psi_0 = A^\dagger \underbrace{A\psi_0}_0,$$

$$H_1\psi_0 = 0. \quad (3.33)$$

Substituindo a primeira expressão de (3.27) em (3.32), obtemos

$$\left(\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\psi_0 + W(x)\psi_0 = 0,$$

$$W(x)\psi_0 = -\underbrace{\frac{d}{dx}\psi_0}_{\psi'_0},$$

$$W(x) = -\frac{\psi'_0}{\psi_0}, \quad (3.34)$$

onde (3.34) define o superpotencial em termos da função de onda no estado fundamental. Se quisermos expressar essa função em termos de $W(x)$, reescrevemos (3.34) como

$$W(x) = d(-\ln \psi_0). \quad (3.35)$$

Integrando (3.35), temos

$$\int W(x)dx = \int d(-\ln \psi_0) dx$$

$$\ln \psi_0 + c = -\int W(x)dx$$

$$\psi_0 = ce^{-\int W(x)dx}. \quad (3.36)$$

Concluimos até aqui, que o superpotencial $W(x)$ é gerador dos potenciais parceiros $V_1(x)$ e $V_2(x)$. Além disso, pelas equações (3.30) e (3.31), se esse superpotencial é definido, podemos encontrar tanto os potenciais parceiros, quanto os hamiltonianos parceiros, expressos em (3.26), e também, a função de onda no estado fundamental como mostra (3.36). Ou, se $V_1(x)$ e $V_2(x)$ são definidos, $W(x)$ pode ser encontrado por meio da equação de Riccati. Porém, esta última acarreta dificuldades matemáticas por não ser uma equação linear (NETO, 2014).

Podemos ainda demonstrar que os potenciais parceiros possuem o mesmo espectro de energia, exceto o estado fundamental de $V_2(x)$, $E_0^{(2)}$, por não haver correspondente para $V_1(x)$. A prova dessa conexão, é que os autovalores de energia, que devem ser positivos semi-definidos, ou seja, ($E_n^{(1,2)} \geq 0$), e as funções de onda de H_1 e H_2 estão relacionadas. Para $n > 0$ a equação de Schrödinger em termos do hamiltoniano H_1 ou H_2 é expressa como (ROBINETT, 1997):

$$H_1\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}, \quad (3.37)$$

ou

$$H_2 \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)}. \quad (3.38)$$

Substituindo a primeira expressão de (3.26) em (3.37) e aplicando o operador A pela esquerda em ambos os lados dessa equação, temos

$$\underbrace{AA^\dagger}_{H_2} A \psi_n^{(1)} = A E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}$$

$$H_2 (A \psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)} (A \psi_n^{(1)}). \quad (3.39)$$

Analogamente, vamos substituir a segunda expressão de (3.26) e multiplicar A^\dagger pela esquerda em ambos os lados de (3.38). Temos então

$$\underbrace{A^\dagger A}_{H_1} A^\dagger \psi_n^{(2)} = A^\dagger (E_n^{(2)} \psi_n^{(2)})$$

$$H_1 (A^\dagger \psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)} (A^\dagger \psi_n^{(2)}). \quad (3.40)$$

Observamos, por meio de (3.39) e (3.40) que os autovalores e as autofunções dos hamiltonianos H_1 e H_2 estão relacionados. Podemos demonstrar isso, partindo das relações (3.26) e das expressões (3.37) e (3.38). Ou seja:

$$H_1 \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)},$$

$$A^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}. \quad (3.41)$$

Vamos suprimir os índices temporariamente e reescrever (3.41) como:

$$A^\dagger A \psi_n = E_n \psi_n. \quad (3.42)$$

multiplicando ambos os lados de (3.42) por ψ_n^* pela esquerda:

$$\psi_n^* A^\dagger A \psi_n = E_n \psi_n^* \psi_n,$$

$$(\psi_n^* A^\dagger) (A \psi_n) = E_n (\psi_n^*) (\psi_n),$$

$$|A \psi_n|^2 = E_n |\psi_n|^2,$$

$$E_n |\psi_n|^2 = |A \psi_n|^2,$$

$$|\psi_n|^2 = E_n^{-1} |A \psi_n|^2,$$

$$\psi_n = E_n^{-\frac{1}{2}} A \psi_n.$$

Fazendo $\psi_n^{(2)} \rightarrow \psi_{n+1}^{(1)}$; $E_n^{(2)} \rightarrow E_{n+1}^{(1)}$, temos

$$\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} A \psi_{n+1}^{(1)}; \quad \psi_{n+1}^{(1)} = [E_n^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} A^\dagger \psi_n^{(2)}, \quad (3.43)$$

com

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad \text{sendo } E_0^{(1)} = 0. \quad (3.44)$$

Pudemos verificar das relações (3.39), (3.40), (3.43) e (3.44) que o operador A não somente converte uma autofunção de H_1 em uma autofunção de H_2 com a mesma energia como também destrói um nó extra⁵. O operador A^\dagger faz o processo inverso. Somente no estado fundamental que não haverá parceiro para H_1 tendo em vista que não há estados de energia abaixo de zero. Resumindo, construímos autofunções de H_1 com o operador A^\dagger e retomamos para as autofunções de H_2 com o operador A , como mostra o diagrama da figura 1. Isso mostra que os operadores escada A e A^\dagger conectam estados com a mesma

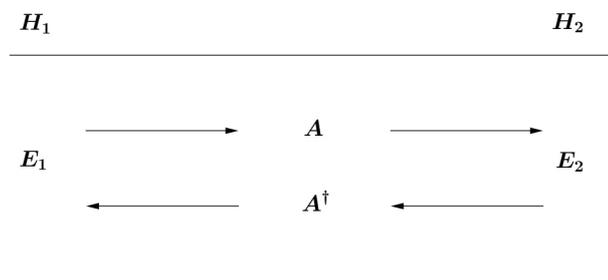


Figura 1 – Diagrama dos estados correspondentes a H_1 e H_2 .

energia, para dois potenciais parceiros, bastante diferentes, a princípio. No caso do oscilador harmônico, os potenciais são idênticos, a menos de uma constante aditiva. Mas, na seção 3.4, verificaremos o caso do poço infinito, cujos potenciais parceiros são bem diferentes.

Assim, partindo da ideia de fatoração do OHB com o uso de a e a^\dagger , fatoramos um hamiltoniano qualquer, utilizando A e A^\dagger cujas funções são as mesmas dos operadores mencionados anteriormente. Com isso, pudemos encontrar a relação entre dois hamiltonianos (denominados *hamiltonianos parceiros*) diferentes e seus potenciais, onde chegamos nos mesmos autovalores de energia para estados diferentes, o que é conhecido como dupla degenerescência. Sabendo que a degenerescência indica simetria em sistemas quânticos, a dupla degenerescência nos dá uma simetria extra, que denominamos *supersimetria* (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; FILHO, 2009; NETO, 2014; ROBINETT, 1997).

3.1.1 Hierarquia dos hamiltonianos

A partir do primeiro estado excitado de H_1 , vimos que, ao aplicarmos A_1 pela esquerda, podemos conhecer a função de onda no estado fundamental do hamiltoniano parceiro H_2 , como mostra as relações (3.43) e (3.44). Segundo Cooper, Khare e Sukhatme

⁵ Conforme se ganha energia, cada estado sucessivo ganha mais um nó, logo, temos que, ψ_0 não tem nenhum nó, ψ_1 tem somente um, e assim, sucessivamente (GRIFFITHS, 2011). Isso justifica a condição (3.32), onde, ao se aplicar o operador aniquilação, temos um estado nulo.

(2001), isso permite a *refatoração* do segundo hamiltoniano em termos de W_2 que pode ser determinada a partir da função de onda no estado fundamental de H_2 . O hamiltoniano parceiro dessa refatoração é agora denominado H_3 . Cada novo hamiltoniano possui um estado ligado a menos como afirma o teorema 1 (SUKUMAR, 1985):

Teorema 1. *Um autovalor do operador $A^\dagger A$ também é autovalor do operador AA^\dagger , exceto quando $A\psi_0 = 0$. Isso pode ser verificado pelas equações (3.39) e (3.40).*

De acordo com o teorema acima, se temos um problema de potencial exatamente solúvel para H_1 , podemos resolver os autovalores de energia e funções de onda para toda a hierarquia dos hamiltonianos criada pelas repetidas fatorações. Ou, se conhecemos as funções de onda no estado fundamental de todos os hamiltonianos desta hierarquia, podemos reconstruir as soluções do problema original.

Até aqui, consideramos a energia no estado fundamental de H_1 nula e assim, escrevemos este hamiltoniano como em (3.26). Então, se a energia no estado fundamental de H_1 for $E_0^{(1)}$ com autofunção $\psi_0^{(1)}$ podemos escrever este operador, de acordo com o teorema 2 (SUKUMAR, 1985):

Teorema 2. *Qualquer hamiltoniano na forma $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, que possui um estado fundamental (ψ_0, E_0) pode ser fatorizado como $H = A^\dagger A + E_0$.*

Desse modo, as expressões de (3.26) podem ser expressas como

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 + E_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (3.45)$$

e

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \quad (3.46)$$

Aplicando H_1 e posteriormente H_2 , em uma função arbitrária $f(x)$ tal como no início desta seção, encontramos

$$V_1(x) = W_1^2(x) - W_1'(x) + E_0^{(1)} \quad (3.47)$$

e

$$V_2(x) = W_1^2(x) + W_1'(x) + E_0^{(1)}, \quad (3.48)$$

onde (3.34) pode ser expressa na forma:

$$W_1(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0. \quad (3.49)$$

Mas, podemos reescrever (3.48) como:

$$\begin{aligned} V_2(x) &= W_1^2(x) + W_1'(x) + E_0^{(1)} - W_1'(x) + W_1'(x), \\ V_2(x) &= \underbrace{W_1^2(x) - W_1'(x) + E_0^{(1)}}_{V_1(x)} + 2W_1'(x), \end{aligned}$$

$$V_2(x) = V_1(x) + 2W_1'(x). \quad (3.50)$$

Diferenciando (3.49), temos

$$W_1'(x) = -\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)}, \quad (3.51)$$

substituimos (3.51) em (3.50):

$$V_2(x) = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)}. \quad (3.52)$$

Introduzindo a notação $E_n^{(m)}$, onde n denota o nível de energia e m refere-se ao m -ésimo hamiltoniano H_m . Considerando as equações (3.43) e (3.44), os autovalores de energia e autofunções dos dois primeiros hamiltonianos são expressos por:

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)}, \quad \psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}]^{-1/2} A\psi_{n+1}^{(1)}. \quad (3.53)$$

Agora, iniciando a partir de H_2 , cuja a energia no estado fundamental é $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ podemos de forma análoga gerar um terceiro hamiltoniano H_3 como um parceiro supersimétrico de H_2 desde que possamos escrever este hamiltoniano como

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = A_2^\dagger A_2 + E_1^{(1)} \quad (3.54)$$

onde

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad (3.55)$$

$$A_2^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \quad (3.56)$$

e

$$W_2(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(2)}. \quad (3.57)$$

Prosseguindo desta forma, obtemos

$$H_3 = A_2 A_2^\dagger + E_1^{(2)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (3.58)$$

onde, ao aplicarmos (3.58) em $f(x)$ como fizemos para H_1 e H_2 , encontramos

$$V_3(x) = W_2^2 + W_2' + E_1^{(1)} \quad (3.59)$$

ou

$$V_3(x) = V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(2)}. \quad (3.60)$$

Substituindo (3.52) em (3.60) chegamos a

$$V_3(x) = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln [\psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)}]. \quad (3.61)$$

Além disso,

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \quad (3.62)$$

e

$$\psi_n^{(3)} = [E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}]^{-1/2} A_2 \psi_{n+1}^{(2)}. \quad (3.63)$$

Substituindo (3.62) em (3.63), encontramos

$$\psi_n^{(3)} = [E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}]^{-1/2} A_2 \psi_{n+1}^{(2)}. \quad (3.64)$$

Desde que

$$\psi_{n+1}^{(2)} = [E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}]^{-1/2} A_1 \psi_{n+2}^{(1)}, \quad (3.65)$$

podemos substituir (3.65) em (3.64), resultando em

$$\psi_n^{(3)} = [E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}]^{-1/2} [E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}]^{-1/2} A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)}. \quad (3.66)$$

Deste modo, fica claro que se o hamiltoniano H_1 possui $p (\geq 1)$ estados ligados com autovalores $E_n^{(1)}$, e autofunções $\psi_n^{(1)}$ com $0 \geq n \geq (p-1)$, então podemos sempre gerar uma hierarquia de $(p-1)$ hamiltonianos H_2, \dots, H_p tal que os m -ésimos membros da hierarquia dos hamiltonianos (H_m) possuam o mesmo espectro de autovalores que H_1 , exceto para os primeiros $(m-1)$ autovalores de H_1 , pois estarão faltando em H_m . Em particular, podemos sempre escrever ($m = 2, 3, \dots, p$) (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001):

$$H_m = A_m^\dagger A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \quad (3.67)$$

onde

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad \text{onde} \quad W_m(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(m)}. \quad (3.68)$$

Temos também

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)}, \quad (3.69)$$

$$\psi_n^{(m)} = [E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}]^{-1/2} \dots [E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}]^{-1/2} A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)} \quad (3.70)$$

e

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln [\psi_0^{(1)} \dots \psi_0^{(m-1)}]. \quad (3.71)$$

Assim, conhecendo todos os autovalores e autofunções de H_1 , imediatamente conhecemos todos os autovalores e autofunções da hierarquia de $(p-1)$ hamiltonianos, em problemas exatamente solúveis (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001).

3.2 O oscilador harmônico fermiônico

Falamos no capítulo 1, que a supersimetria permite relacionar partículas bosônicas e fermiônicas. Na MQS, fazemos apenas uma relação algébrica entre estados bosônicos e fermiônicos em $(1 + 0)$ dimensões. Nesse caso, é necessário escrever um outro hamiltoniano a partir de dois outros operadores não hermitianos b e b^\dagger . Esses operadores são denominados, respectivamente, de *operadores fermiônicos* de aniquilação e criação e toda a construção realizada anteriormente para os operadores a e a^\dagger , chamados agora de *operadores bosônicos* de aniquilação e criação, será desenvolvida em termos dos operadores fermiônicos (CARMO, 2011; FILHO, 2009; FREITAS, 2008).

Além disso, precisamos entender a física dos férmions. Eles obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, onde por esse princípio, dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente. A outra característica dos férmions é que eles são partículas de spin $1/2$. Um sistema de spin $1/2$ tem como *kets* de base $|S_z; \pm\rangle = |\pm\rangle$, dos quais definimos dois operadores não hermitianos S_+ e S_- ,

$$S_+ = \hbar|+\rangle\langle-|, \quad S_- = \hbar|-\rangle\langle+|, \quad (3.72)$$

denominados, respectivamente, operadores de levantamento e de abaixamento.

A partir destes operadores e dos operadores S_x e S_y podemos construir e definir os operadores fermiônicos b e b^\dagger como

$$b^\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y); \quad b = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y). \quad (3.73)$$

Detalhes desta construção encontram-se no apêndice B.

Vamos calcular as relações de comutação e anticomutação entre b e b^\dagger :

$$\begin{aligned} \{b^\dagger, b\} &= bb^\dagger + b^\dagger b, \\ \{b^\dagger, b\} &= \frac{1}{4}(\sigma_x + i\sigma_y)(\sigma_x - i\sigma_y) + \frac{1}{4}(\sigma_x - i\sigma_y)(\sigma_x + i\sigma_y), \\ \{b^\dagger, b\} &= \frac{1}{4}(\sigma_x^2 - i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + i\sigma_x\sigma_y - i\sigma_y\sigma_x + \sigma_y^2), \\ \{b^\dagger, b\} &= \frac{1}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2), \\ \{b^\dagger, b\} &= \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Usando as propriedades

$$\sigma_i^2 = 1; \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}; \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.75)$$

onde δ_{ij} e ε_{ijk} são, respectivamente, o delta de Kronecker e o tensor Levi-Civita. Podemos escrever a equação (3.74) na seguinte forma (com $i = j$):

$$\{b^\dagger, b\} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sigma_x^2}_1 + \underbrace{\sigma_y^2}_1 \right),$$

$$\{b, b^\dagger\} = 1. \quad (3.76)$$

De forma análoga, podemos demonstrar que

$$\{b^\dagger, b\} = 1. \quad (3.77)$$

Temos também que

$$[b^\dagger, b] = bb^\dagger - b^\dagger b,$$

$$[b^\dagger, b] = \frac{1}{4}(\sigma_x + i\sigma_y)(\sigma_x - i\sigma_y) - \frac{1}{4}(\sigma_x - i\sigma_y)(\sigma_x + i\sigma_y),$$

$$[b^\dagger, b] = \frac{1}{4}(\sigma_x^2 - i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x + \sigma_y^2 - \sigma_x^2 - i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x - \sigma_y^2),$$

$$[b^\dagger, b] = \frac{1}{4}(-i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x - i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x),$$

$$[b^\dagger, b] = \frac{1}{2} \underbrace{(-i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x)}_{\sigma_z},$$

$$[b^\dagger, b] = \sigma_z. \quad (3.78)$$

Mas, como é mostrado no apêndice B, a relação de comutação (3.78) é escrita, substituindo (B.25) em (3.78), na forma

$$[b^\dagger, b] = 2H,$$

$$H = \frac{1}{2}[b^\dagger, b]. \quad (3.79)$$

Calculando agora $\{b, b\}$ e $\{b^\dagger, b^\dagger\}$, fazendo uso das propriedades das matrizes de Pauli (3.75), temos

$$\{b, b\} = bb + bb,$$

$$\{b, b\} = 2bb,$$

$$\{b, b\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)(\sigma_x + i\sigma_y),$$

$$\{b, b\} = \frac{1}{2}[\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + i\sigma_x\sigma_y + i\sigma_y\sigma_x] = \frac{1}{2}[\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + i(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)],$$

$$\{b, b\} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sigma_x^2}_1 - \underbrace{\sigma_y^2}_1 + i \underbrace{(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)}_0 \right],$$

$$\begin{aligned}
\{b, b\} &= 0, \\
\{b^\dagger, b^\dagger\} &= b^\dagger b^\dagger + b^\dagger b^\dagger, \\
\{b^\dagger, b^\dagger\} &= 2b^\dagger b^\dagger, \\
\{b^\dagger, b^\dagger\} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)(\sigma_x - i\sigma_y), \\
\{b^\dagger, b^\dagger\} &= \frac{1}{2}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 - i\sigma_x\sigma_y - i\sigma_y\sigma_x), \\
\{b^\dagger, b^\dagger\} &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sigma_x^2}_1 - \underbrace{\sigma_y^2}_1 + i \underbrace{(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)}_0 \right], \\
\{b^\dagger, b^\dagger\} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

3.3 Oscilador harmônico supersimétrico

Em analogia com a equação (3.6) o hamiltoniano em termos dos operadores fermiônicos é expresso como

$$H_f = b^\dagger b - \frac{1}{2}. \tag{3.82}$$

Definindo:

$$b^\dagger b = M \tag{3.83}$$

podemos reescrever (3.20) e (3.82) como

$$H_b = N + \frac{1}{2}, \tag{3.84}$$

$$H_f = M - \frac{1}{2}, \tag{3.85}$$

onde, H_b e H_f são os hamiltonianos bosônico e fermiônico, respectivamente.

Podemos calcular os autovalores de (3.84) e (3.85), aplicando H_b e H_f em ambos os lados das equações nos estados $|n\rangle$ e $|m\rangle$, respectivamente. Ou seja:

$$\begin{aligned}
H_b|n\rangle &= \left(N + \frac{1}{2}\right) |n\rangle, \\
H_b|n\rangle &= \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right)}_{E_{b_n}} |n\rangle, \\
E_{b_n} &= n + \frac{1}{2}, \\
H_f|m\rangle &= \left(M - \frac{1}{2}\right) |m\rangle,
\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$H_f|m\rangle = \underbrace{\left(m - \frac{1}{2}\right)}_{E_{f_m}}|m\rangle,$$

$$E_{f_m} = m - \frac{1}{2}. \quad (3.87)$$

Tomando as expressões (A.12) do apêndice A, para $n = 0$, temos

$$a|0\rangle = \sqrt{0}|0-1\rangle,$$

$$a|0\rangle = 0,$$

$$a^\dagger|0\rangle = \sqrt{0+1}|0+1\rangle,$$

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle,$$

para $n = 1, 2, \dots$ temos:

$$a|1\rangle = 1|0\rangle,$$

$$a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle,$$

$$a|2\rangle = \sqrt{2}|1\rangle,$$

$$a^\dagger|2\rangle = \sqrt{3}|3\rangle,$$

$$\vdots$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle.$$

E assim, podemos ver que o valor mínimo para n é 0 e que não existe um valor máximo para n . Desse modo, n pode tomar valores iguais a 0, 1, 2, 3,

No caso fermiônico, definimos formalmente que os operadores de criação (aniquilação) quando aplicados a um estado $|m\rangle$, respectivamente, criam (destroem) um nó extra, tal qual os operadores bosônicos (VALLEJO, 2012):

$$b^\dagger|m\rangle = |m+1\rangle, \quad (3.88)$$

$$b|m\rangle = |m-1\rangle. \quad (3.89)$$

Mencionamos na seção 3.2 que estes operadores não podem violar o princípio da exclusão de Pauli e que, pela álgebra já vista e demonstrada desses operadores, temos:

$$(b^\dagger)^2 = 0; \quad (b)^2 = 0, \quad (3.90)$$

para qualquer que seja o estado em que estiverem atuando. Assim, teremos, por exemplo, para o estado fundamental onde $m = 0$, ou seja $|m\rangle$:

$$b^\dagger|0\rangle = |1\rangle. \quad (3.91)$$

Mas, por (3.90)

$$b^\dagger b^\dagger |0\rangle = b^\dagger |1\rangle,$$

$$(b^\dagger)^2 |0\rangle = b^\dagger |1\rangle,$$

$$b^\dagger |1\rangle = 0. \quad (3.92)$$

Ressalvando que, análogo ao operador de aniquilação bosônico, ao aplicarmos o operador de aniquilação fermiônico no estado $|0\rangle$, o resultado é nulo por não haver estado de energia menor que 0. Ou seja

$$b|0\rangle = 0 \quad (3.93)$$

Todavia, aplicando esse operador no estado $|1\rangle$, resulta:

$$b|1\rangle = |0\rangle. \quad (3.94)$$

Entretanto, utilizando (3.90), obtemos

$$bb|1\rangle = b|0\rangle,$$

$$(b)^2|1\rangle = b|0\rangle,$$

$$b|0\rangle = 0. \quad (3.95)$$

Podemos ainda, aplicar b em (3.91) e em (3.92) e b^\dagger em (3.93) e em (3.94). Temos (VALLEJO, 2012),

$$b^\dagger b|0\rangle = 0; \quad bb^\dagger|0\rangle = |0\rangle; \quad b^\dagger b|1\rangle = |1\rangle; \quad bb^\dagger|1\rangle = 0. \quad (3.96)$$

Desse modo, a partir das relações (3.92) - (3.96) e lembrando que o sistema de spin 1/2 é descrito apenas por dois autoestados representados por $|+\rangle$ e $|-\rangle$, concluímos que o sistema de partículas fermiônicas não possuem valores de estado maiores que $m = 1$ e nem menores que $m = 0$, ou seja, $|+\rangle = |m = 1\rangle$ é o estado máximo e $|-\rangle = |m = 0\rangle$ é o estado mínimo do sistema de partículas fermiônicas.

Definidos os hamiltonianos bosônico e fermiônico, (3.84) e (3.85), podemos escrever um hamiltoniano que seja a soma destes:

$$H = N + \frac{1}{2} + M - \frac{1}{2}$$

$$H = N + M, \quad (3.97)$$

sendo

$$N|n\rangle = n|n\rangle; \quad M|m\rangle = m|m\rangle. \quad (3.98)$$

Podemos escrever o estado

$$|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle. \quad (3.99)$$

Desse modo, a equação dos autovalores de H no estado $|n, m\rangle$ é

$$\begin{aligned} H|n, m\rangle &= (N + M)(|n\rangle \otimes |m\rangle), \\ H|n, m\rangle &= N(|n\rangle \otimes |m\rangle) + M(|n\rangle \otimes |m\rangle), \\ H|n, m\rangle &= n(|n\rangle \otimes |m\rangle) + m(|n\rangle \otimes |m\rangle), \\ H|n, m\rangle &= (n + m)(|n\rangle \otimes |m\rangle), \end{aligned}$$

$$H|n, m\rangle = (n + m)|n, m\rangle. \quad (3.100)$$

Para o estado fundamental, temos que $H|n, m\rangle = 0$, de modo que $E_0 = 0$. Acima desse estado, a degenerescência ocorre para $n > 0$ onde $m = 0$ ou $m = 1$. Podemos verificar isso aplicando H nos estados $|n, 0\rangle$ e $|n - 1, 1\rangle$ e usando (3.100) (com $n > 0$), ou seja,

$$H|n, 0\rangle = n|n, 0\rangle \quad (3.101)$$

$$H|n - 1, 1\rangle = (n - 1 + 1)|n - 1, 1\rangle$$

$$H|n - 1, 1\rangle = n|n - 1, 1\rangle. \quad (3.102)$$

As expressões (3.101) e (3.102) nos mostra que para dois estados diferentes de H com dois valores diferentes de m e mesmo valor de n , temos o mesmo autovalor, o que se verifica a dupla degenerescência, e como tratado anteriormente, a supersimetria (FILHO, 2009; FREITAS, 2008).

3.3.1 Geradores de supersimetria: hamiltoniano supersimétrico

De posse dos conceitos de estados bosônicos e fermiônicos, podemos reformular o que falamos anteriormente sobre os operadores aniquilação e criação A e A^\dagger (ou a e a^\dagger). Afirmamos que o operador A converte um autoestado de H_1 em um autoestado de H_2 com a mesma energia, destruindo um nó extra. E o operador A^\dagger faz o processo inverso. Com relação à conversão entre os estados bosônicos e fermiônicos, a degenerescência aparece quando simultaneamente é destruído um estado fermiônico ($m \rightarrow m - 1$) e criado uma estado bosônico ($n \rightarrow n + 1$), ou vice-versa. Com isso, espera-se que os geradores da supersimetria, também denominados de *supercargas* sejam uma combinação dos operadores de aniquilação e criação bosônicos e fermiônicos. Definimos esses operadores como (CARMO, 2011; FILHO, 2009; FREITAS, 2008):

$$Q = ab, \quad (3.103)$$

$$Q^\dagger = a^\dagger b^\dagger. \quad (3.104)$$

A relação de anticomutação entre (3.103) e (3.104) é dada por

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= QQ^\dagger + Q^\dagger Q, \\ \{Q, Q^\dagger\} &= aba^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger ab, \\ \{Q, Q^\dagger\} &= aa^\dagger bb^\dagger + a^\dagger ab^\dagger b. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Reescrevendo (B.20), em termos de (B.1), temos

$$\begin{aligned} b^\dagger &= \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), \\ b^\dagger &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right], \\ b^\dagger &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right], \\ b^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ b^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y), \\ b &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right], \\ b &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right], \\ b &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ b &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Substituindo (3.106) e (3.107) em (3.105)

$$\{Q, Q^\dagger\} = aa^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a^\dagger a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\{Q, Q^\dagger\} &= aa^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a^\dagger a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\{Q, Q^\dagger\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & aa^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^\dagger a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\{Q, Q^\dagger\} &= \begin{pmatrix} a^\dagger a & 0 \\ 0 & aa^\dagger \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.108}$$

ou, sem perda de generalidade, podemos escrever

$$\{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix}. \tag{3.109}$$

Substituindo (3.26) em (3.109), encontramos

$$\{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = H_{SS}, \tag{3.110}$$

onde H_{SS} é denominado *hamiltoniano supersimétrico* e

$$Q = ab = a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = a^\dagger b^\dagger = a^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.111}$$

E agora vamos calcular as relações: $[H, Q]$, $[H, Q^\dagger]$, $\{Q, Q\}$ e $\{Q^\dagger, Q^\dagger\}$.

$$\begin{aligned}
[H, Q] &= HQ - QH, \\
[H, Q] &= (N + M)Q - Q(N + M), \\
[H, Q] &= (a^\dagger a + b^\dagger b)ab - ab(a^\dagger a + b^\dagger b), \\
[H, Q] &= (a^\dagger a + b^\dagger b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} (a^\dagger a + b^\dagger b), \\
[H, Q] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ aa^\dagger a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab^\dagger b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ aa^\dagger a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab^\dagger b & 0 \end{pmatrix}, \\
[H, Q] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

De forma análoga, temos

$$\begin{aligned}
[H, Q^\dagger] &= 0, \\
\{Q, Q\} &= QQ + QQ, \\
\{Q, Q\} &= 2QQ, \\
\{Q, Q\} &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.113}$$

$$\{Q, Q\} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\{Q, Q\} = 0. \quad (3.114)$$

Analogamente, escrevemos

$$\{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0. \quad (3.115)$$

Assim, as relações (3.110), (3.112), (3.113), (3.114) e (3.115) descrevem a superálgebra fechada, comentada no capítulo 1. Outra forma de classificar a álgebra da SUSY QM é considerando a contagem do número de geradores hermitianos que anticomutam $Q_i, i = 1, \dots, N$. Desse modo para uma superálgebra N estendida temos:

$$\{Q_i, Q_j\} = H\delta_{ij}, \quad (3.116)$$

$$Q_i = Q_i^\dagger, \quad (3.117)$$

$$[H, Q_i] = 0, \quad (3.118)$$

$$H = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^2. \quad (3.119)$$

Por causa da comutação das supercargas Q e Q^\dagger com H , temos a presença da degenerescência no espectro de H_1 e H_2 . Elas também podem ser interpretadas como operadores que mudam os graus de liberdade bosônicos para fermiônicos e vice-versa (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001).

Resumindo, temos visto que se há um potencial exatamente solúvel, com pelo menos um estado ligado, então podemos construir seu potencial parceiro supersimétrico e este será também exatamente solúvel. Os autoestados de energia correspondentes a este estado ligado são facilmente obtidos usando a equação (3.44) (FREITAS, 2008).

3.4 Resolução da equação de Schrödinger via supersimetria

3.4.1 Poço quadrado infinito

Seguindo a literatura (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; CARMO, 2011; FILHO, 2009), vamos resolver a equação (2.4) para o poço de potencial quadrado infinito,

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & -\infty < x < 0, \quad x > L, \end{cases} \quad (3.120)$$

cujas soluções na região $0 \leq x \leq L$ são

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \text{sen} \left[\frac{(n+1)\pi x}{L} \right], \quad (3.121)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n+1)^2}{2mL^2}, \quad (3.122)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$

Vamos definir um hamiltoniano H_1 de partida em um poço infinito deslocado de tal modo que este tenha energia do estado fundamental nulo, ou seja (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; CARMO, 2011)

$$H_1 = H - E_0, \quad (3.123)$$

com potencial

$$V_1 = V(x) - E_0. \quad (3.124)$$

Os autovalores de energia são, seguindo o procedimento usado anteriormente, dados por

$$E_n^{(1)} = \frac{n(n+2)}{L^2} \pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.125)$$

e as autofunções normalizadas são

$$\psi_n^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \text{sen} \left[\frac{(n+1)\pi x}{L} \right], \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.126)$$

Reescrevendo (2.4) como

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (3.127)$$

no interior do poço, temos

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x),$$

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - E\psi(x) = 0. \quad (3.128)$$

Desse modo, o hamiltoniano de partida assume a seguinte forma:

$$H^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2}. \quad (3.129)$$

Da primeira relação de (3.26), podemos escrever

$$H_1 = A^\dagger A. \quad (3.130)$$

Substituindo (3.130) em (3.123), temos:

$$H_1 = H^{(1)} - E_0^{(1)},$$

$$A^\dagger A = H^{(1)} - E_0^{(1)},$$

$$H^{(1)} = A^\dagger A + E_0^{(1)}, \quad (3.131)$$

o qual substituindo em (3.131), fornece

$$H^{(1)} = \left[-\frac{d}{dx} + W(x) \right] \left[\frac{d}{dx} + W(x) \right] + E_0^{(1)}. \quad (3.132)$$

Aplicando (3.132) em $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} H^{(1)}\psi(x) &= \left[-\frac{d}{dx} + W(x) \right] \left[\frac{d\psi(x)}{dx} + W(x)\psi(x) \right] + E_0^{(1)}\psi(x), \\ H^{(1)}\psi(x) &= \left[-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} [W(x)\psi(x)] + W(x)\frac{d\psi(x)}{dx} + W^2(x)\psi(x) \right] + E_0^{(1)}\psi(x), \\ H^{(1)}\psi(x) &= -\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \psi(x)\frac{dW(x)}{dx} - W(x)\frac{d\psi(x)}{dx} + W(x)\frac{d\psi(x)}{dx} + W^2(x)\psi(x) + E_0^{(1)}\psi(x), \\ H^{(1)}\psi(x) &= -\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \psi(x)\frac{dW(x)}{dx} + W^2(x)\psi(x) + E_0^{(1)}\psi(x), \\ H^{(1)}\psi(x) &= \left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{dW(x)}{dx} + W^2(x) + E_0^{(1)} \right] \psi(x), \\ H^{(1)}\psi(x) &= \left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{dW(x)}{dx} + W^2(x) + E_0^{(1)} \right] \psi(x), \\ H^{(1)} &= -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{dW(x)}{dx} + W^2(x) + E_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Comparando (3.133) com (3.129), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} &= -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{dW(x)}{dx} + W^2(x) + E_0^{(1)}, \\ W^2(x) - \underbrace{\frac{dW(x)}{dx}}_{W'(x)} + E_0^{(1)} &= 0, \\ W^2(x) - W'(x) + E_0^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.134)$$

que é a equação de Riccati,

$$W'(x) = W^2(x) + E_0^{(1)}. \quad (3.135)$$

No início deste capítulo, solucionamos uma equação semelhante à (3.135) considerando (3.32) e chegando assim, a (3.34). Diferenciando (3.126) em relação a x , temos

$$\psi_n'^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{L} \right)^{1/2} \frac{(n+1)\pi}{L} \cos \left[\frac{(n+1)\pi x}{L} \right]. \quad (3.136)$$

Substituindo (3.126) e (3.136) em (3.34) resulta

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{(n+1)\pi}{L} \cos\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right]}{\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right]},$$

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{(n+1)\pi}{L} \cot\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right]. \quad (3.137)$$

Agora levando (3.137) à (3.31), obtemos o potencial

$$V_2(x) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{L^2} \cot^2\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right] + \frac{(n+1)^2\pi^2}{L^2} \operatorname{csc}^2\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right],$$

$$V_2(x) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{L^2} \left\{ \cot^2\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right] + \operatorname{csc}^2\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right] \right\}. \quad (3.138)$$

Usando a relação trigonométrica,

$$\cot^2 x = \operatorname{csc}^2 x - 1, \quad (3.139)$$

e de posse da (3.138), podemos reescrever (3.139) como

$$V_2(x) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{L^2} \left\{ \operatorname{csc}^2\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right] - 1 + \operatorname{csc}^2\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right] \right\},$$

$$V_2(x) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{L^2} \left\{ 2\operatorname{csc}^2\left[\frac{(n+1)\pi x}{L}\right] - 1 \right\}. \quad (3.140)$$

Pudemos verificar que, a partir de H_1 e das suas funções de onda, chegamos naturalmente ao potencial parceiro de $V(x)$. Desse modo, concluímos que V_2 é o potencial do hamiltoniano H_2 , assim como $V(x)$ é potencial de H_1 . Resta-nos encontrar as funções de onda para H_2 . As funções de onda para H_2 são obtidas por meio da equação (3.53). Para isso, calculemos primeiramente a função de onda para o nível fundamental, $n = 0$, cuja equação é expressa como

$$\psi_0^{(2)} = [E_1^{(1)}]^{-1/2} A\psi_1^{(1)}. \quad (3.141)$$

Reescrevendo (3.125) e (3.126) para $n = 0$ e substituindo em (3.141), temos

$$\psi_0^{(2)} = \left(\frac{3}{L^2}\pi^2\right)^{-1/2} A \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (3.142)$$

Substituindo a primeira expressão de (3.27) em (3.142), encontramos

$$\psi_0^{(2)} = \frac{L}{\sqrt{3}\pi} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] + W(x) \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right\}. \quad (3.143)$$

Depois de substituir (3.137) na (3.143), para $n = 0$, obtemos

$$\psi_0^{(2)} = \frac{L}{\sqrt{3}\pi} \left\{ \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
\psi_0^{(2)} &= \frac{L}{\sqrt{3}\pi} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{L}{\sqrt{3}\pi} \frac{\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \\
\psi_0^{(2)} &= \sqrt{\frac{2}{3L}} 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \sqrt{\frac{2}{3L}} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \\
\psi_0^{(2)} &= \sqrt{\frac{2}{3L}} \left[2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]. \tag{3.144}
\end{aligned}$$

Usando as relações

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= 1 - 2 \text{sen}^2(x), \\
\text{sen}(2x) &= 2 \text{sen}x \cos x, \tag{3.145}
\end{aligned}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}x}, \tag{3.146}$$

juntamente com as equações (3.145) e (3.146), podemos reescrever (3.144) como

$$\begin{aligned}
\psi_0^{(2)} &= \sqrt{\frac{2}{3L}} \left\{ 2 \left[1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] - \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)} 2 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\}, \\
\psi_0^{(2)} &= \sqrt{\frac{2}{3L}} \left\{ 2 \left[1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] - 2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\},
\end{aligned}$$

ou

$$\psi_0^{(2)} = 2\sqrt{\frac{2}{3L}} \left\{ 1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\}. \tag{3.147}$$

Lembrando que:

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x, \tag{3.148}$$

utilizamos (3.148) para reescrever (3.147) e obtemos:

$$\begin{aligned}
\psi_0^{(2)} &= 2\sqrt{\frac{2}{3L}} \left\{ 1 - 2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\} \\
\psi_0^{(2)} &= -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right). \tag{3.149}
\end{aligned}$$

Para $n = 1$, escrevemos

$$\psi_1^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{L}} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \tag{3.150}$$

Acabamos de mostrar via MQS que dois potenciais bastante diferentes, correspondendo a H_1 e a H_2 possuem exatamente o mesmo espectro, exceto para o fato que H_2 possui um estado ligado a menos (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; NETO, 2014).

3.5 Potenciais invariantes de forma

Nesta seção, mostramos que o método dos operadores para o OH pode ser generalizado para uma classe de s potenciais denominados *potenciais invariantes de forma* (PIFs) a qual inclui todos os potenciais populares e analiticamente solúveis. Veremos que para tais potenciais, o método do operador generalizado produz rapidamente todos autovalores e autofunções de energia de um estado ligado (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001).

Observando as equações (3.30) e (3.31), podemos verificar que ambas são similares em forma e que diferem somente nos seus respectivos parâmetros. Isso significa que $V_1(x)$ e $V_2(x)$ são invariantes de forma. Em outras palavras, para os potenciais parceiros $V_1(x)$ e $V_2(x)$ que satisfazendo a condição

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (3.151)$$

onde a_1 é um conjunto de parâmetros, a_2 é uma função de a_1 , ou seja, $a_2 = f(a_1)$, e $R(a_1)$ é o resíduo e não depende de x , temos que tais potenciais são invariantes de forma.

Usando a condição (3.151) e a hierarquia dos hamiltonianos, podemos facilmente obter os autovalores de energia e autofunções de qualquer potencial invariante de forma quando a supersimetria não é quebrada.

3.5.1 Fórmulas gerais para o espectro de estados ligados e funções de onda

Sabendo que os hamiltonianos parceiros H_1 e H_2 possuem autovalores e autofunções relacionados pela MQS e que para uma supersimetria não quebrada são válidas as relações

$$\begin{aligned} E_0^{(1)}(a_1) &= 0 \\ \psi_0^{(1)}(x; a_1) &= N e^{-\int W_1(y; a_1) dy}, \end{aligned} \quad (3.152)$$

será mostrado pela invariância de forma que todo o espectro de H_1 podem ser obtido algebricamente de modo simples. Para isso, vamos construir uma série de hamiltonianos H_s , onde $s = 1, 2, 3, \dots$. Em particular, seguindo a discussão da subseção 3.1.1, fica claro que se H_1 possui p estados ligados, então é possível construir p tal que os hamiltonianos H_1, H_2, \dots, H_p e o $n - \text{ésimo}$ hamiltoniano H_n tenham o mesmo espectro de H_1 , exceto pelo primeiro nível deste hamiltoniano, que estará ausente.

Substituindo (3.151) em (3.46), temos

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_2) + R(a_1). \quad (3.153)$$

Usando a condição de invariância de forma (3.151) s vezes, temos:

$$H_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \quad (3.154)$$

onde $a_s = f^{s-1}(a_1)$, ou seja, a função f aplicada $s - 1$ vezes. Comparemos agora os espectros de H_s e H_{s+1} . Para isso, tomemos as equações (3.151) e (3.154) e escrevamos H_{s+1} e $V_1(x; a_{s+1})$ na forma

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k), \quad (3.155)$$

$$V_1(x; a_{s+1}) = V_2(x; a_s) - R(a_s). \quad (3.156)$$

Substituindo (3.156) em (3.155), temos

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_s) + \sum_{k=1}^s R(a_k) - R(a_s),$$

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k). \quad (3.157)$$

Podemos observar pelas expressões (3.154) e (3.157) que os hamiltonianos H_s e H_{s+1} são parceiros supersimétricos e, portanto, possuem espectro de energia do estado ligado idênticos, exceto para o estado fundamental de H_s cuja energia é por (3.44). Pela condição de invariância de forma escrevemos (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; NETO, 2014),

$$E_{n+1}^{(2)}(a_1) = E_n^{(1)}(a_2) + R(a_1). \quad (3.158)$$

Para $n = 0$, temos

$$E_1^{(2)}(a_1) = E_0^{(1)}(a_2) + R(a_1). \quad (3.159)$$

Substituindo (3.44) em (3.159), temos

$$E_1^{(2)}(a_1) = E_2^{(1)}. \quad (3.160)$$

Inserindo (3.160) em (3.159), obtemos

$$E_2^{(1)} = E_0^{(1)}(a_2) + R(a_1). \quad (3.161)$$

Aplicando s vezes a condição de invariância de forma (3.161) e lembrando de (3.44), encontramos

$$E_n^{(s)}(a_s) = \sum_{n=0}^{s-1} R(a_{s+1}). \quad (3.162)$$

Notemos que se voltarmos de H_s para H_{s-1} etc, chegaríamos eventualmente em H_2 e H_1 cuja energia do estado fundamental é zero e cujo n -ésimo nível coincide com o estado fundamental do hamiltoniano H_n . Assim, o espectro completo desses autovalores de H_1 é dado por (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001):

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k); \quad E_0^{(1)}(a_1) = 0. \quad (3.163)$$

Com relação às autofunções dos s hamiltonianos, temos que H_s no estado fundamental possui autofunção expressa como $\psi_0^{(1)}(x; a_s)$, que por sua vez é conhecida em termos do superpotencial. Passando de H_s para H_{s-1} até chegar em H_1 e lembrando de (3.43), encontramos que a n -ésima autofunção não normalizada $\psi_n^{(1)}(x; a_1)$ para $H_1(x; a_1)$ é dada por

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) \propto A^\dagger(x; a_1)A^\dagger(x; a_2)\dots A^\dagger(x; a_n)\psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}). \quad (3.164)$$

Muitas vezes é conveniente ter expressões explícitas para as funções de onda. Neste caso, ao invés de usar a equação (3.164), é mais conveniente utilizar a identidade

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) = A^\dagger(x; a_1)\psi_{n-1}^{(1)}(x; a_2). \quad (3.165)$$

No presente capítulo, pudemos estudar o formalismo da MQS e verificar a elegância e simplicidade da mesma ao associar sistemas diferentes a seus respectivos hamiltonianos, potenciais e autovalores de energia. Ainda que fizemos menção dos bósons e férmions, a MQS unidimensional usa apenas a ferramenta matemática desses dois sistemas. A razão disso é que ela nos possibilita encontrar os potenciais e hamiltonianos parceiros, como vimos na aplicação do poço quadrado infinito. O sucesso da MQS em estados ligados, não indica sucesso em estados de espalhamento, pois há restrições, mas, a beleza e simplicidade ainda perdura, como veremos a seguir.

CAPÍTULO 4

ESPALHAMENTO QUÂNTICO UNIDIMENSIONAL VIA MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA

No presente capítulo, aplicamos a mecânica quântica supersimétrica nos estados de espalhamento, partindo do cálculo das amplitudes de espalhamento de alguns potenciais invariantes de forma, já bem conhecidos na literatura (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; COOPER; GINOCCHIO; KHARE, 1987; KHARE; SUKHATME, 1988). Com isso, obtemos os coeficientes de transmissão e reflexão desses potenciais e fazemos uma aplicação para o potencial de Pöschl-Teller apresentado por Castro, Castro e Hott (2007).

4.1 Amplitudes de espalhamento via MQS: formalismo

A MQS permite relacionar as amplitudes de espalhamento em situações onde os dois potenciais parceiros tem espectro contínuo. Para isso, consideremos os potenciais $V_{1,2}$ finitos quando $x \rightarrow \pm\infty$. Essa consideração é feita para que tenhamos soluções finitas, tal como relatamos na subseção 2.2.2. Desse modo, definimos os superpotenciais $W(x)$ como (COOPER; KHARE; SUKHATME, 2001; NETO, 2014)

$$W(x \rightarrow \pm\infty) = W_{\pm}, \quad (4.1)$$

cujos valores são constantes. Deste modo, (3.30) e (3.31) são reescritos na forma:

$$V_1 \rightarrow W_+^2, \quad V_2 \rightarrow W_-^2, \quad \text{para } x \rightarrow \pm\infty. \quad (4.2)$$

Tal como apresentamos na subseção 2.4.1, vamos considerar uma onda plana incidente a partir de $x \rightarrow -\infty$, com energia E . Como um resultado do espalhamento a partir dos potenciais $V_{1,2}(x)$, podemos obter ondas transmitidas, $T_{1,2}(k)e^{ik'x}$ e ondas refletidas $R_{1,2}(k)e^{ikx}$. As soluções são

$$\psi_{1,2}(k, x \rightarrow -\infty) \rightarrow e^{ikx} + R_{1,2}e^{-ikx}, \quad (4.3)$$

$$\psi_{1,2}(k', x \rightarrow +\infty) \rightarrow T_{1,2} e^{ik'x} \quad (4.4)$$

onde

$$k = (E - W_-^2)^{1/2}; \quad k' = (E - W_+^2)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Vemos assim, que a MQS conecta funções de onda contínuas de H_1 e H_2 que possuem a mesma energia de forma análoga ao que acontece no espectro discreto. Tomando, por exemplo, a segunda equação de (3.44) e lembrando que o espectro agora é contínuo, temos que

$$\psi^{(1)} = [E^{(2)}]^{-1/2} A^\dagger \psi^{(2)}. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.3) em (4.6), obtemos

$$e^{ikx} + R_1 e^{-ikx} = [E^{(2)}]^{-1/2} A^\dagger (e^{ikx} + R_2 e^{-ikx}). \quad (4.7)$$

Agora, substituindo a segunda equação em (3.27) na (4.7) chegamos a

$$e^{ikx} + R_1 e^{-ikx} = N [(W_- - ik) e^{ikx} + (W_- + ik) R_2 e^{-ikx}] \quad (4.8)$$

onde $N = [E^{(2)}]^{-1/2}$. Comparando (4.8) termo a termo, escrevemos

$$N (W_- - ik) = 1, \quad (4.9)$$

$$R_1 = N (W_- + ik) R_2. \quad (4.10)$$

Isolando N em (4.9), temos

$$N = \frac{1}{W_- - ik} \quad (4.11)$$

o qual substituído em (4.10), fornece

$$R_1 = \left(\frac{W_- + ik}{W_- - ik} \right) R_2. \quad (4.12)$$

Se $W_- = 0$ temos $R_1 = -R_2$. Substituindo agora (3.27) e (4.4) em (4.6), obtemos

$$T_1 e^{ik'x} = N (W_+ - ik') T_2 e^{ik'x}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.11) em (4.13)

$$T_1 = \left(\frac{W_+ - ik'}{W_- - ik} \right) T_2. \quad (4.14)$$

Calculando $|R_1|^2$ em (4.12), temos

$$|R_1|^2 = \left(\frac{W_- - ik}{W_- + ik} \right) \left(\frac{W_- + ik}{W_- - ik} \right) R_2^* R_2.$$

$$|R_1|^2 = |R_2|^2. \quad (4.15)$$

Calculando $|T_1|^2$, temos

$$\begin{aligned} |T_1|^2 &= \left(\frac{W_+ + ik'}{W_- + ik} \right) \left(\frac{W_+ - ik'}{W_- - ik} \right) T_2^* T_2 \\ |T_1|^2 &= \left(\frac{W_+ + ik'}{W_- + ik} \right) |T_2|^2 \end{aligned}$$

e considerando $W_+ = W_-$, onde $k' = k$, temos que:

$$|T_1|^2 = |T_2|^2. \quad (4.16)$$

Isolando R_2 da equação (4.12) temos:

$$R_2 = \left(\frac{W_- - ik}{W_- + ik} \right) R_1. \quad (4.17)$$

Para calcular R_3 , que é a amplitude de reflexão de H_3 , usamos a relação

$$R_3 = \left(\frac{W_- - ik}{W_- + ik} \right) R_2. \quad (4.18)$$

Mas, substituindo (4.17) em (4.18):

$$R_3 = \left(\frac{W_- - ik}{W_- + ik} \right) \left(\frac{W_- - ik}{W_- + ik} \right) R_1. \quad (4.19)$$

Repetindo esse procedimento m vezes, encontramos:

$$R_m = \left(\frac{W_-^{(1)} - ik}{W_-^{(1)} + ik} \right) \cdots \left(\frac{W_-^{(m-1)} - ik}{W_-^{(m-1)} + ik} \right) R_1. \quad (4.20)$$

Assim, obtemos a amplitude de reflexão para a hierarquia dos hamiltonianos, em termos de R_1 do primeiro hamiltoniano H_1 . Analogamente, encontramos a amplitude de transmissão:

$$T_m = \left(\frac{W_-^{(1)} - ik}{W_+^{(1)} - ik'} \right) \cdots \left(\frac{W_-^{(m-1)} - ik}{W_+^{(m-1)} - ik'} \right) T_1. \quad (4.21)$$

Do mesmo modo que foi aplicada a condição de invariância de forma para encontrar autofunções e autovalores de energia de um estado ligado, podemos para essa condição, encontrar as amplitudes de espalhamento. Neste caso, as expressões (4.20) e (4.21) são reescritas como:

$$R_1(k; a_1) = \prod_{n=0}^{N-1} \left(\frac{W_-(a_n) + ik}{W_-(a_n) - ik} \right) R_1(k, a_N), \quad (4.22)$$

e

$$T_1(k; a_1) = \prod_{n=0}^{N-1} \left(\frac{W_+(a_n) - ik'}{W_-(a_n) - ik} \right) T_1(k, a_N). \quad (4.23)$$

4.2 Amplitudes de espalhamento via MQS: aplicações

4.2.1 Potencial de Rosen-Morse simétrico

Seja o superpotencial

$$W = A \operatorname{tgh} \alpha x, \quad (4.24)$$

onde A e α são parâmetros. Substituindo (4.24) em (3.30) chegamos a

$$V_1 = A^2 - A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad (4.25)$$

que é denominado potencial de *Rosen-Morse simétrico*. Substituindo (4.24) e (4.25) em (3.50) temos o potencial parceiro

$$V_2 = A^2 - A(A - \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x. \quad (4.26)$$

Reescrevendo (4.25) e (4.26) como:

$$V_1(x; a_2) = a_2^2 - a_2(a_2 + \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad (4.27)$$

$$V_2(x; a_1) = A^2 - A(A - \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad (4.28)$$

onde $a_1 = A$. Subtraindo V_1 de V_2 , temos

$$V_2(x; a_1) - V_1(x; a_2) = R(a_1). \quad (4.29)$$

Substituindo (4.27) e (4.28) em (4.29)

$$A^2 - A(A - \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x - a_2^2 + a_2(a_2 + \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x = R(a_1) \quad (4.30)$$

ou

$$A^2 - a_2^2 + \left[a_2^2 + a_2 \alpha - A^2 + A \alpha \right] \operatorname{sech}^2 \alpha x = R(a_1).$$

Para que $R(a_1)$ seja constante, devemos estabelecer que:

$$a_2^2 + a_2 \alpha - A^2 + A \alpha = 0,$$

$$a_2^2 + a_2 \alpha = A^2 - A \alpha,$$

$$a_2^2 + \frac{2a_2 \alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} = A^2 - \frac{2A \alpha}{2},$$

$$a_2^2 + \frac{2a_2 \alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} = A^2 - \frac{2A \alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4},$$

$$\left(a_2 + \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \left(A - \frac{\alpha}{2} \right)^2,$$

$$a_2 + \frac{\alpha}{2} = \pm \left(A - \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$a_2 = \pm \left(A - \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\alpha}{2},$$

ou seja,

$$a_2 = \begin{cases} A - \alpha, \\ -A. \end{cases} \quad (4.31)$$

Substituindo (4.31) em (4.30)

$$R(a_1) = \begin{cases} 2A\alpha - \alpha^2 \implies a_2 = A - \alpha, \\ 0 \implies a_2 = -A. \end{cases} \quad (4.32)$$

Vemos que para ambos os valores de a_2 , $R(a_1)$ é constante, entretanto, para evitar trivialidade escolhamos $a_2 = A - \alpha$, conseqüentemente $R(a_1) = 2A\alpha - \alpha^2$. Isso mostra que o potencial $V_2(x; a_1)$, além de ser parceiro de $V_1(x; a_2)$ é invariante de forma.

Para calcular as amplitudes de espalhamento, reescrevemos (4.24) como

$$W(x) = A \left(\frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2\alpha x} + 1} \right). \quad (4.33)$$

Sabendo que o superpotencial avaliado em $\pm\infty$ é constante como em (4.1), tomando (4.33) nesse limite, temos

$$W(x \rightarrow -\infty) = W_- = A \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2\alpha x} + 1} \right) = -A$$

e

$$W(x \rightarrow +\infty) = W_+ = A \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2\alpha x} + 1} \right) = A,^1$$

de modo que

$$W_+ = -W_- = A. \quad (4.34)$$

Além disso, substituindo (4.34) em (4.5), temos que, $k = k' = (E - A^2)^{1/2}$. Desse modo, escrevemos (4.14) e (4.23) como

$$T_1(k) = \left(\frac{A - ik}{-A - ik} \right) T_2(k), \quad (4.35)$$

$$T_1(k; A) = \prod_{n=0}^{s-1} \left(\frac{A - n\alpha - ik}{-A + n\alpha - ik} \right) T_1(k, A - s\alpha). \quad (4.36)$$

Desenvolvendo (4.36) e fazendo $A = s\alpha$ e $T_1(k, A - s\alpha) = 1$

$$T_1(k; A) = \left(\frac{A - ik}{-A - ik} \right) \left(\frac{A - \alpha - ik}{-A + \alpha - ik} \right) \cdots \left(\frac{A - (s-1)\alpha - ik}{-A + (s-1)\alpha - ik} \right). \quad (4.37)$$

Fazendo

$$q = \frac{k}{\alpha}, \quad s = \frac{A}{\alpha}, \quad (4.38)$$

¹ Neste caso, aplicamos a regra de *L'Hospital* que tem como objetivo calcular o limite de frações que apresentam indeterminações, tais como $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Seu enunciado diz que se f e g são funções deriváveis num intervalo ou união de intervalos I , com $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = \infty$, então, $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda = +\infty$ ou $\lambda = -\infty$. Assim: $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Onde $p = c, p = c^+, p = c^-, p = -\infty$ ou $p = +\infty$ (GUIDORIZZI, 2000).

a equação (4.37) assume a forma

$$T_1(k) = \left(\frac{s - iq}{-s - iq} \right) \left(\frac{s - 1 - iq}{-s + 1 - iq} \right) \cdots \left(\frac{1 - iq}{-1 - iq} \right). \quad (4.39)$$

Usando

$$(s - iq)(s - 1 - iq) \cdots (1 - iq) = \frac{(s - iq)!}{(-iq)!} = \frac{\Gamma(s + 1 - iq)}{\Gamma(1 - iq)} \quad (4.40)$$

e

$$(-1 - iq)(-2 - iq) \cdots (-s - iq) = \frac{(-1 - iq)!}{(-s - 1 - iq)!} = \frac{\Gamma(-iq)}{\Gamma(-s - iq)} \quad (4.41)$$

em (4.39), resulta

$$T_1(k) = \frac{\Gamma(-s - iq)\Gamma(s + 1 - iq)}{\Gamma(-iq)\Gamma(1 - iq)} \quad (4.42)$$

tal como é mostrado na tabela 1 do [Khare e Sukhatme \(1988\)](#)(vide anexo A).

Sabendo que o coeficiente de transmissão é a razão entre o módulo quadrado de uma amplitude de transmissão e amplitude incidente (que neste caso tem valor igual a 1), temos que

$$T = |T_1(k)|^2. \quad (4.43)$$

Substituindo (4.42) em (4.43), obtemos

$$T = \left| \frac{\Gamma(-s - iq)\Gamma(s + 1 - iq)}{\Gamma(-iq)\Gamma(1 - iq)} \right|^2, \quad (4.44)$$

que pode ser escrita como

$$T = \frac{\Gamma(-s - iq)\Gamma(-s + iq)\Gamma(s + 1 - iq)\Gamma(s + 1 + iq)}{\Gamma(-iq)\Gamma(iq)\Gamma(1 - iq)\Gamma(1 + iq)}. \quad (4.45)$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} z_1 &= s + 1 + iq, \\ 1 - z_1 &= -s - iq, \\ z_2 &= s + 1 - iq, \\ 1 - z_2 &= -s + iq, \end{aligned} \quad (4.46)$$

podemos reescrever as funções gamma do numerador de (4.45) como

$$\begin{aligned} \Gamma(s + 1 + iq) &= \Gamma(z_1), \\ \Gamma(-s - iq) &= \Gamma(1 - z_1), \\ \Gamma(s + 1 - iq) &= \Gamma(z_2), \\ \Gamma(-s + iq) &= \Gamma(1 - z_2). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Com as funções (4.47), chegamos às seguintes relações²

$$\Gamma(z_1) \Gamma(1 - z_1) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z_1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi (s + 1 + iq)} \quad (4.48)$$

$$\Gamma(z_2) \Gamma(1 - z_2) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z_2} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi (s + 1 - iq)}. \quad (4.49)$$

Realizando o produto entre (4.48) e (4.49), obtemos a relação³:

$$\Gamma(z_1) \Gamma(1 - z_1) \Gamma(z_2) \Gamma(1 - z_2) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi s \cosh^2 \pi q + \cos^2 \pi s \operatorname{senh}^2 \pi q}. \quad (4.50)$$

Levando (4.50) em (4.45), temos

$$T = \frac{\pi^2}{\left(\operatorname{sen}^2 \pi s \cosh^2 \pi q + \cos^2 \pi s \operatorname{senh}^2 \pi q \right) \Gamma(-iq) \Gamma(iq) \Gamma(1 - iq) \Gamma(1 + iq)}. \quad (4.51)$$

Reescrevendo as funções gamma do denominador de (4.51) como

$$|\Gamma(iq)|^2 = \frac{\pi}{q \operatorname{senh} \pi q} \quad (4.52)$$

$$|\Gamma(1 + iq)|^2 = q^2 |\Gamma(iq)|^2 = \frac{q\pi}{\operatorname{senh} \pi q}. \quad (4.53)$$

O produto entre (4.52) e (4.53) nos dá

$$|\Gamma(iq)|^2 |\Gamma(1 + iq)|^2 = \frac{\pi^2}{\operatorname{senh}^2 \pi q}. \quad (4.54)$$

Substituindo (4.54) em (4.51)

$$T = \frac{\operatorname{senh}^2 \pi q}{\operatorname{sen}^2 \pi s \cosh^2 \pi q + \cos^2 \pi s \operatorname{senh}^2 \pi q}. \quad (4.55)$$

Lembrando que

$$\cos^2 \pi s = 1 - \operatorname{sen}^2 \pi s, \quad (4.56)$$

$$\cosh^2 \pi q = 1 + \operatorname{senh}^2 \pi q,$$

podemos reescrever (4.55) como:

$$T = \frac{\operatorname{senh}^2 \pi q}{\operatorname{sen}^2 \pi s + \operatorname{senh}^2 \pi q}. \quad (4.57)$$

Definindo:

$$p = \frac{\operatorname{senh} \pi q}{\operatorname{sen} \pi s}, \quad (4.58)$$

² Mais detalhes em Abramowitz e Stegun (1964), Magnus e Oberhettinger (1954) e Nikiforov e Uvarov (1988).

³ Onde utilizamos as seguintes relações: $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$; $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$; $\cos ix = \cosh x$; $\operatorname{sen} ix = i \operatorname{senh} x$ e $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

podemos expressar (4.57) da forma

$$T = \frac{p^2}{1 + p^2}. \quad (4.59)$$

Por (2.70), podemos encontrar o coeficiente de reflexão, utilizando (4.59). Desse modo, temos

$$R = \frac{1}{1 + p^2}. \quad (4.60)$$

Os coeficientes T e R expressos em (4.59) e (4.60) estão de acordo com os resultados encontrados por Flügge (1994, p.99).

O potencial de Rosen-Morse simétrico, também denominado de *potencial de Pöschl-Teller modificado* (FLÜGGE, 1994), tem despertado o interesse da comunidade acadêmica, tendo em vista que o mesmo descreve, por exemplo, vibrações moleculares. Isso faz com que seja importante estudar os estados de espalhamento, como fizeram Chang-Yuan, Fa-Lin e Yuan (2012), e também os estados ligados como fizeram Castro, Castro e Hott (2007). Nesse último trabalho, foram encontradas soluções exatas de estados ligados da equação de Dirac, para férmions com massa. Daremos então prosseguimento ao mesmo, estudando os estados de espalhamento, utilizando toda a ferramenta matemática apresentada no início da presente seção. Mas antes, vamos fazer alguns comentários relevantes de conceitos expostos nesse artigo.

- **A equação de Dirac com uma mistura de potenciais vetorial e escalar em (1 + 1) dimensões**

Dada a equação de Dirac independente do tempo com (1 + 1) dimensão para um férmion com massa de repouso m , na presença de potenciais vetorial e escalar independentes do tempo, como

$$H\psi = [c\alpha_0 p + \beta (mc^2 + V_s) + V_v] \psi = E\psi \quad (4.61)$$

onde E é a energia do férmion, c é a velocidade da luz, p é o operador momento e α_0 e β são matrizes quadradas hermitianas⁴ que satisfazem as relações

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 = \beta^2 = 1, \\ \{\alpha_0, \beta\} = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Os subscritos s e v nos potenciais V , denotam suas propriedades sob uma transformação de Lorentz, onde v refere-se à componente temporal do potencial vetor, e s ao potencial escalar. A função positiva-definida $|\psi|^2 = \psi^\dagger \psi$, satisfazendo a equação de continuidade, é interpretada como uma densidade de probabilidade na posição e sua norma é uma

⁴ Correspondem às matrizes de Pauli, onde $\alpha_0 = \sigma_x$ e $\beta = \sigma_z$. Vide apêndice B.

constante de movimento. Além disso, a densidade de corrente para (4.61) é dada por (GREINER, 2000)

$$J = c\psi^\dagger\alpha_0\psi. \quad (4.63)$$

Sendo o espinor⁵ escrito em termos das componentes superior e inferior, ψ_+ e ψ_- , respectivamente, a equação de Dirac é decomposta em duas equações diferenciais de primeira ordem, expressas como

$$i\hbar c \frac{d\psi_+}{dx} = [V_v - E - (mc^2 + V_s)] \psi_- \quad (4.64)$$

$$i\hbar c \frac{d\psi_-}{dx} = [V_v - E + (mc^2 + V_s)] \psi_+. \quad (4.65)$$

Assumindo que $V_v = V_s$, a componente inferior é obtida a partir do conhecimento da componente superior por meio da equação

$$\psi_- = -\frac{i\hbar c}{E + mc^2} \frac{d\psi_+}{dx}, \quad (4.66)$$

e para a componente superior, obtém-se o *problema de Sturm-Liouville*⁶

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_+}{dx^2} + \left(\frac{E + mc^2}{mc^2} V_s \right) \psi_+ = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \psi_+. \quad (4.67)$$

Diante dessas considerações, a densidade de corrente torna-se

$$\begin{aligned} J &= c \begin{pmatrix} \psi_+^* & \psi_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \\ J &= c \begin{pmatrix} \psi_+^* & \psi_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \\ J &= c (\psi_+^* \psi_- + \psi_-^* \psi_+). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Usando (4.66), podemos reescrever (4.68) como uma função que depende somente da componente superior,

$$\begin{aligned} J &= c \left[\psi_+^* \left(-\frac{i\hbar c}{E + mc^2} \right) \frac{d\psi_+}{dx} + \left(\frac{i\hbar c}{E + mc^2} \right) \frac{d\psi_+^*}{dx} \psi_+ \right] \\ J &= \frac{\hbar c^2}{i(E + mc^2)} \left(\psi_+^* \frac{d\psi_+}{dx} - \psi_+ \frac{d\psi_+^*}{dx} \right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

⁵ Estado geral de uma partícula de spin 1/2 que é expresso como uma matriz coluna de dois elementos (GRIFFITHS, 2011).

⁶ Na teoria das equações diferenciais ordinárias, chama-se de equação de Sturm-Liouville, nome dado em homenagem aos matemáticos Jacques Charles François Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1882), uma equação diferencial real de segunda ordem da forma: $-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda w(x)y$. As funções $p(x)$, $q(x)$ e $w(x)$ são parâmetros e, no caso dito regular, são contínuas no intervalo fechado limitado $[a, b]$. O problema é normalmente complementado com condições de contorno especificadas. A função $w(x)$ é costumeiramente chamada de função “peso” ou função “densidade”.

Notemos que a equação (4.69) é formalmente equivalente à equação (2.34) que corresponde à equação de Schrödinger. Portanto, de acordo com os resultados (4.67) e (4.69) podemos concluir que o estudo dos estados de espalhamento na equação de Dirac unidimensional é equivalente ao estudo dos estados de espalhamento na equação de Schrödinger com um potencial efetivo.

• **O potencial de Pöschl-Teller modificado**

Multiplicando (4.67) por $\frac{2m}{\hbar}$, e assumindo

$$V_s = -V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad V_0 > 0 \quad (4.70)$$

temos

$$-\frac{d\psi_+^2}{dx^2} + \left[\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{2(E + mc^2)}{\hbar^2 c^2} V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x \right] \psi_+ = \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \psi_+. \quad (4.71)$$

A equação (4.71) é uma equação de Schrödinger com um potencial efetivo dado por

$$V_{eff} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{2(E + mc^2)}{\hbar^2 c^2} V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad (4.72)$$

que é o potencial de Pöschl-Teller modificado⁷.

Agora, para estudar estados de espalhamento via MQS, primeiramente estudamos o comportamento da equação (4.71) em $x \rightarrow \pm\infty$, que, nesses pontos, torna-se

$$\begin{aligned} -\frac{d\psi_+^2}{dx^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi_+ &= \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \psi_+ \\ -\frac{d\psi_+^2}{dx^2} &= \left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) \psi_+ \end{aligned} \quad (4.73)$$

de onde obtemos

$$k = k' = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{\hbar c}. \quad (4.74)$$

Comparando (4.72) com (4.25), extraímos a relação

$$A^2 + A\alpha = -\frac{2(E + mc^2)}{\hbar^2 c^2} V_0$$

e obtemos

$$A = \frac{\alpha}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8(E + mc^2) V_0}{\hbar^2 c^2}} \right) \quad (4.75)$$

Desse modo, as relações (4.38) tornam-se

$$q = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{\hbar c \alpha}, \quad s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8(E + mc^2) V_0}{(\hbar c \alpha)^2}} \right). \quad (4.76)$$

⁷ Como mencionamos anteriormente, este potencial é o mesmo potencial de Rosen-Morse simétrico. Daqui em diante, denominaremos como potencial de Pöschl-Teller modificado, ou, abreviadamente, PT.

Substituindo (4.76) em (4.57), temos

$$T = \frac{p'^2}{1 + p'^2} \quad (4.77)$$

posteriormente, substituindo (4.77) em (2.70), obtemos

$$R = \frac{1}{1 + p'^2}, \quad (4.78)$$

onde

$$p' = \frac{\sinh\left(\pi \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{\hbar c \alpha}\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8(E + mc^2)V_0}{(\hbar c \alpha)^2}}\right)\right]}. \quad (4.79)$$

Neste capítulo, estudamos os estados de espalhamento via mecânica quântica supersimétrica (MQS), que nos permitiu obter as amplitudes de espalhamento de todos os potenciais parceiros pela condição de invariância de forma e hierarquia dos hamiltonianos. Além disso, calculamos os coeficientes de transmissão (T) e reflexão (R) do potencial de Pöschl-Teller modificado, que é invariante de forma. Pudemos perceber, que pela MQS, chegamos aos resultados de T e R desse potencial, já calculados pela forma tradicional, porém com maior elegância e simplicidade. Com isso, fizemos uma aplicação no trabalho desenvolvido por [Castro, Castro e Hott \(2007\)](#), no qual restringiram-se à estudar os estados ligados da equação de Dirac unidimensional, para férmions com massa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudamos no presente trabalho, o formalismo da mecânica quântica supersimétrica (MQS), partindo do método de fatoração do hamiltonianos do oscilador harmônico bosônico (OHB). Este método consiste em escrever o hamiltoniano como produto dos operadores escada a e a^\dagger , que são operadores não hermitianos, denominados de operadores aniquilação e criação, respectivamente. Tais operadores são escritos em função dos operadores posição x e momento p . Ao aplicar o hamiltoniano escrito na forma fatorada em um certo estado $|n\rangle$, pudemos naturalmente encontrar os autovalores de energia do OHB. Isso confirma que tal método é simples e eficaz para encontrar os autovalores desse hamiltoniano.

Desse modo, foi possível aplicar o método para um hamiltoniano qualquer, cujos operadores escada eram escritos de forma generalizada. Assim, o aplicamos para o caso do oscilador harmônico fermiônico (OHF), onde também foi possível encontrar seus autovalores de energia, apesar de neste caso, trabalharmos com as matrizes de Pauli. Além disso, foi-nos permitido associar os hamiltonianos destes dois osciladores, o que gerou um hamiltoniano Supersimétrico, a partir dos geradores de carga, que nada mais são que operadores cujo produto é dado entre um operador escada bosônico e um operador escada fermiônico. Com isso, verificamos que as relações de comutação e anticomutação de tais cargas (ou *supercargas*) satisfazem a superálgebra (ou álgebra de Lie estendida).

Ao realizar o método de fatoração repetidas vezes, foi possível encontrar novos hamiltonianos parceiros e com isso, novos potenciais parceiros, cujos autovalores de energia eram os mesmos, com exceção do primeiro hamiltoniano, cujo autovalor é nulo e não há como ter um estado de energia menor que este. Dessa forma, obtivemos a hierarquia dos hamiltonianos, que nos permitiu encontrar as autofunções de potenciais diferentes, mas que possuem os mesmos autovalores. A partir disso, pudemos estudar os estados ligados do potencial poço quadrado infinito por meio da MQS, onde, encontramos os seus hamiltoniano e potencial parceiros, e vimos que, mesmo sendo potenciais diferentes, eles possuem as mesmas autofunções e os mesmos autovalores de energia. Isso nos faz lembrar

da teoria supersimétrica que converte um estado bosônico em fermiônico e vice-versa, ou seja, dois estados diferentes, dando a informação de uma mesma partícula, por exemplo.

Em se tratando dos potenciais parceiros, vimos que existem uma certa classe de potenciais, cujo parceiro supersimétrico diferencia-se apenas por um parâmetro, por isso são denominados potenciais invariantes de forma (PIF). Tais potenciais são exatamente solúveis, e bem conhecidos na literatura. Com eles e pela hierarquia dos hamiltonianos, foi possível construir o espectro de energia para todos os hamiltonianos, em função de apenas um (no caso, H_1), e também encontrar todas as autofunções destes operadores.

Assim, torna-se mais viável estudar os estados ligados dos PIFs, pela MQS, pois basta apenas saber a informação de um parceiro supersimétrico ou do superpotencial. A MQS também nos permite estudar os estados de espalhamento, com a restrição de ter sucesso apenas para os PIFs. Porém, por serem bastante utilizados na literatura, aplicamos a MQS para os estados espalhamento desses potenciais e vimos a simplicidade e elegância em encontrar os coeficientes de transmissão (T) e reflexão (R).

No nosso caso, tomamos o potencial de Pöschl-Teller modificado, que descreve vibrações moleculares e por isso, é bastante utilizado, e encontramos as amplitudes de espalhamento do mesmo, sabendo apenas a definição do seu superpotencial e aplicando as condições de invariância de forma. Com isso, obtivemos facilmente T e R , cujos resultados concordam com os encontrados na literatura. Flüge por exemplo, obteve esses coeficientes partindo da função hipergeométrica, onde alguns *ansatz* foram considerados. Concluimos então que pela MQS, tais resultados surgem de forma natural e mais elegante.

Como aplicação, calculamos T e R para férmions relativísticos com massa sob influência de um potencial do tipo Pöschl-Teller modificado (PT). Isso é uma complementação do trabalho desenvolvido por Castro, Castro e Hott (2007), que encontraram soluções exatas de estados ligados da equação de Dirac para tais férmions, numa mistura de potenciais vetorial e escalar do tipo PT. Seus coeficientes são facilmente encontrados, redefinindo apenas os valores dos parâmetros A e α . Ao estudar o espalhamento de tal equação, pudemos concluir que esta é equivalente a estudar a equação de Schrödinger com um potencial efetivo. Assim, vemos que a forma de T e R são formalmente as mesmas que no caso não-relativístico.

Desse modo, pudemos verificar que a mecânica quântica supersimétrica mostra um caminho mais simples e elegante para o estudo dos estados de espalhamento dos potenciais invariantes de forma. Porém, seu sucesso fica restrito a essa classe de potenciais que se resume em quatro potenciais, no caso unidimensional (vide anexo A). Contudo, são potenciais largamente utilizados na literatura por suas aplicações na matéria condensada, física de partículas, biologia molecular, entre outros. Sendo assim, tal restrição não é obstáculo para a aplicação da MQS no estudo do espalhamento quântico, pois observamos a facilidade que são obtidos seus resultados.

Como proposta de trabalhos futuros, estudaremos o espalhamento quântico via MQS para os potenciais de Scarff e Rosen-Morse, cujas aplicações podem ser encontradas em [Curi \(2017\)](#) e [Milpas, Torres e Murguía \(2011\)](#), respectivamente. Também faremos o estudo dos estados ligados via MQS do trabalho desenvolvido por [Castro, Castro e Hott \(2007\)](#), para verificação de resultados e comparação de metodologias aplicadas. Outra aplicação será realizada em potenciais tridimensionais, tal como o potencial vetorial e escalar coulombiano, aplicado na equação de Dirac.

REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: Courier Corporation, 1964. v. 55. Citado na página 69.

CARMO, F. M. do. *Um estudo sobre a supersimetria no contexto da mecânica quântica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 13, 15, 16, 39, 47, 52, 55 e 56.

CASTRO, A. de. Espalhamento e estados ligados em potenciais localizados. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, p. 4312–4312, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34 e 35.

CASTRO, L. B.; CASTRO, A. S. de; HOTT, M. B. Bounded solutions of fermions in the background of mixed vector-scalar Pöschl-Teller-like potentials. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 77, n. 2, p. 20009, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/77/i=2/a=20009>>. Citado 6 vezes nas páginas 18, 63, 70, 73, 75 e 76.

CHAICHIAN, M.; HAGEDORN, R. *Symmetries in quantum mechanics: from angular momentum to supersymmetry*. [S.l.]: INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 15.

CHANG-YUAN, C.; FA-LIN, L.; YUAN, Y. Scattering states of modified Pöschl-teller potential in d-dimension. *Chinese Physics B*, IOP Publishing, v. 21, n. 3, p. 030302, 2012. Citado na página 70.

COOPER, F.; GINOCCHIO, J. N.; KHARE, A. Relationship between supersymmetry and solvable potentials. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 36, p. 2458–2473, Oct 1987. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.36.2458>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 63.

COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. *Supersymmetry in quantum mechanics*. Singapore: World Scientific, 2001. Citado 12 vezes nas páginas 13, 16, 39, 43, 44, 46, 55, 56, 59, 60, 61 e 63.

CURI, E. J. A. *Férmions em uma parede de Bloch*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, 2017. Citado na página 76.

- DARTORA, C.; JIMENEZ, M. J. S.; ZANELLA, F. Os fundamentos da física dos férmions de Dirac sem massa em $(1+2)$ -D e o grafeno. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n. 3, p. 3301, 2015. Citado na página 17.
- DONAGELO, R. J.; CAPAZ, R. B. *Introdução à mecânica quântica*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009. v. 1. Citado na página 27.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física quântica: átomos, moléculas e partículas*. Rio de Janeiro: Campus - Elsevier, 1979. Citado na página 24.
- ESHGHI, M.; MEHRABAN, H. Effective of the q-deformed pseudoscalar magnetic field on the charge carriers in graphene. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 57, n. 8, p. 082105, 2016. Citado na página 17.
- FERNÁNDEZ, F. M. Wronskian method for one-dimensional quantum scattering. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 79, n. 8, p. 877–881, 2011. Nenhuma citação no texto.
- FILHO, E. D. *Supersimetria aplicada à mecânica quântica: estudo da equação de Schrödinger*. São Paulo: SciELO-Ed. UNESP, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 39, 43, 47, 52 e 55.
- FLEMING, H. *Mecânica quântica: obra coletiva*. São Paulo, s.d. Disponível em: <<http://www.hfleming.com/qm31.pdf>>. Acesso em: 19 out. 2016. Citado na página 24.
- FLÜGGE, S. *Practical quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 75.
- FREITAS, G. B. de. *Métodos de solução da equação de Schrödinger e suas limitações*. Dissertação (Mestrado) — UNESP, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 39, 47, 52 e 55.
- GENDENSHTEIN, L. Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by means of supersymmetry. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 38, p. 356, 1983. Citado na página 16.
- GOL'FAND, Y. A.; LIKHTMAN, E. P. Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of P invariance. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 13, p. 323, abr. 1971. Citado na página 13.
- GOZZI, E. *Notes on quantum mechanics with examples of solved problems*. Trieste, 2012. Disponível em: <<http://www-dft.ts.infn.it/~gozzi/Notes%20on%20Quantum%20Mechanics.pdf>>. Acesso em: 14 set. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.
- GRATTON, J. *Introducción a la mecánica cuántica*. Buenos Aires, 2003. Disponível em: <<http://www.lfp.uba.ar/es/notas%20de%20cursos/notasmecanicacuantica/Cuantica.pdf>>. Acesso em: 14 set. 2016. Nenhuma citação no texto.
- GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring theory*. New York: Cambridge University Press Cambridge, 1987. v. 1 and 2. Citado na página 14.
- GREINER, W. *Relativistic quantum mechanics: wave equations*. [S.l.]: Springer, 2000. Citado na página 71.

- GRIFFITHS, D. J. *Mecânica quântica*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 18, 20, 26, 27, 29, 43, 71 e 88.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 1*. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000. Citado na página 67.
- HORVATH, J.; ALLEN, M. P. *Cosmologia física: do micro ao macro cosmos e vice-versa*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Citado na página 14.
- JUNKER, G. *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996. Citado na página 13.
- KHARE, A.; SUKHATME, U. P. Scattering amplitudes for supersymmetric shape-invariant potentials by operator methods. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 21, n. 9, p. L501, 1988. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/21/i=9/a=005>>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 63, 68 e 91.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mecânica quântica: teoria não relativista*. Moscou: Mir, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- MACHADO, K. D. *Teoria do eletromagnetismo*. Ponta Grossa: UEPG, 2002. v. 2. Citado na página 24.
- MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F. *Formulas and theorems for the functions of mathematical physics*. [S.l.]: Chelsea Pub. Co., 1954. Citado na página 69.
- MCGUIRE, P. C.; STEINHARDT, P. J. Cracking open the window for strongly interacting massive particles as the halo dark matter. *arXiv preprint astro-ph/0105567*, 2001. Citado na página 15.
- MELIA, F. *The edge of infinity: supermassive black holes in the universe*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 14.
- MESSIAH, A. *Quantum mechanics*. New York: Dove Publications, 1958. Citado 3 vezes nas páginas 18, 22 e 23.
- MILPAS, E.; TORRES, M.; MURGUÍA, G. Magnetic field barriers in graphene: an analytically solvable model. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 23, n. 24, p. 245304, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 76.
- MORAAL, H. Generalized wronskian theorem and integral representations for phase shift differences. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 71–72, 1973. Nenhuma citação no texto.
- NETO, O. N. *Potenciais modulares e novas soluções em mecânica quântica supersimétrica*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-03112014-121822/en.php>>. Acesso em: 25 set. 2015. Citado 9 vezes nas páginas 13, 14, 15, 39, 41, 43, 59, 61 e 63.
- NIKIFOROV, A. F.; UVAROV, V. B. *Special functions of mathematical physics*. [S.l.]: Springer, 1988. v. 205. Citado na página 69.

- RIBEIRO, M. et al. Os problemas de espalhamento quântico em potenciais elementares. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 26, n. 1, p. 1–10, 2004. Citado na página 17.
- ROBINETT, R. W. *Quantum mechanics: classical results, modern systems and visualized examples*. 1nd. ed. New York: Oxford, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 18, 41, 43 e 83.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna*. Porto Alegre: Bookman, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 18, 37, 84, 86 e 88.
- SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999. Citado na página 14.
- SUKUMAR, C. V. Supersymmetry, factorisation of the Schrodinger equation and a hamiltonian hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 18, n. 2, p. L57, 1985. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/18/i=2/a=001>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 44.
- VALLEJO, J. A. Introducción a la supersimetría. *ArXiv e-prints*, maio 2012. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- VOLKOV, D.; AKULOV, V. Is the neutrino a Goldstone particle? *Physics Letters B*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 109–110, 1973. Citado na página 13.
- WESS, J.; ZUMINO, B. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 70, n. 1, p. 39–50, 1974. Citado na página 13.
- WITTEN, E. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nuclear Physics B*, v. 188, n. 3, p. 513 – 554, 1981. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321381900067>>. Citado na página 15.
- WITTEN, E. Constraints on supersymmetry breaking. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 202, n. 2, p. 253–316, 1982. Citado na página 15.

Apêndices

APÊNDICE A

OPERADORES ESCADA BOSÔNICOS

Os operadores escada a e a^\dagger são assim denominados por diminuir (descer) e aumentar (subir), respectivamente, o número de estados de um sistema. Vamos examinar os efeitos destes operadores e justificar suas atuações. Para isso, tomemos a definição do operador número dada em (3.19) e calculemos a comutação entre este e a , como segue.

$$[N, a] = [a^\dagger a, a]. \quad (\text{A.1})$$

Dada a identidade

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C], \quad (\text{A.2})$$

a expressão (A.1) torna-se:

$$[N, a] = [a^\dagger, a]a. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (3.13) em (A.3):

$$[N, a] = -a. \quad (\text{A.4})$$

De forma análoga, deduzimos que:

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (\text{A.5})$$

Utilizando (A.4) e (A.5), vamos aplicar N nos estados $a^\dagger|n\rangle$ e $a|n\rangle$, respectivamente:

$$N(a^\dagger|n\rangle) = (Na^\dagger - a^\dagger N + Na^\dagger)|n\rangle$$

$$N(a^\dagger|n\rangle) = \left(\underbrace{[N, a^\dagger]}_{a^\dagger} + Na^\dagger \right) |n\rangle$$

$$N(a^\dagger|n\rangle) = a^\dagger|n\rangle + Na^\dagger|n\rangle$$

$$N(a^\dagger|n\rangle) = (n+1)a^\dagger|n\rangle. \quad (\text{A.6})$$

De modo semelhante, temos:

$$N(a|n\rangle) = (n-1)a|n\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Segundo Robinett (1997) Os resultados (A.6) e (A.7) implicam que:

- os operadores a e a^\dagger atuando em $|n\rangle$ devem dar, até uma constante arbitrária, os estados $|n-1\rangle$ e $|n+1\rangle$, respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &\propto |n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &\propto |n+1\rangle; \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

- os operadores a e a^\dagger agem na "escada" dos possíveis autovalores, descendo ou subindo o valor da energia. Esse é o motivo de denominarmos a de operador aniquilação, destruição ou abaixamento, e a^\dagger de operador criação ou levantamento. A figura 2, mostra a atuação desses operadores.

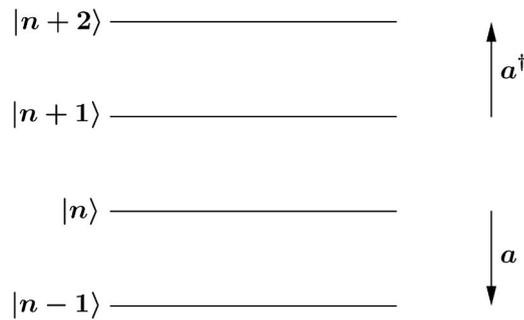


Figura 2 – Atuação dos operadores escada.

Tomamos as expressões de (A.8) e reescrevemos como:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= c_1|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= c_2|n+1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas pela condição de normalização para $|n\rangle$, $|n-1\rangle$ e $|n+1\rangle$, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle n|a^\dagger a|n\rangle &= \langle n-1|c_1^* c_1|n-1\rangle \\ \langle n|N|n\rangle &= \langle n-1||c_1|^2|n-1\rangle \\ \langle n|n|n\rangle &= |c_1|^2 \langle n-1|n-1\rangle \\ n &= |c_1|^2 \end{aligned}$$

$$c_1 = \sqrt{n}. \quad (\text{A.10})$$

Fazemos o mesmo procedimento para encontrar c_2 , no qual achamos:

$$c_2 = \sqrt{n+1}. \quad (\text{A.11})$$

Desse modo, substituímos (A.10) e (A.11) em (A.9), que fica:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Se continuarmos aplicando, por exemplo, o operador a em ambos os lados da primeira expressão de (A.12), temos (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013):

$$\begin{aligned} a^2|n\rangle &= \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle \\ a^3|n\rangle &= \sqrt{n(n-1)(n-2)}|n-3\rangle, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A sequência (A.13) é interrompida pois termina com $n=0$ e os valores de n permitidos são os inteiros não negativos (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013).¹

Da mesma forma, aplicamos a^\dagger continuamente em ambos os lados da segunda expressão de (A.12) e obtemos, para $n=0, 1, 2, \dots$ e $|n+1\rangle = \frac{a^\dagger|n\rangle}{\sqrt{n+1}}$:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= a^\dagger|0\rangle \\ |2\rangle &= \frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}}|0\rangle \\ |3\rangle &= \frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}|2\rangle = \frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3}\sqrt{2}}|0\rangle = \frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3!}}|0\rangle \\ &\vdots \\ |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Vimos no capítulo 3, seção 3.1, que $|n\rangle$ é autoestado de H e N . Reescrevendo (3.16) (ou (3.17)) na forma:

$$H = \frac{1}{2} \{a, a^\dagger\}. \quad (\text{A.15})$$

Vamos agora aplicar (A.15) no estado $|n\rangle$:

$$H|n\rangle = \frac{1}{2} \{a, a^\dagger\} |n\rangle$$

¹ Mais detalhes, ver Sakurai e Napolitano (2013, p. 90).

$$\begin{aligned}
 H|n\rangle &= \frac{1}{2}[aa^\dagger + a^\dagger a]|n\rangle = \frac{1}{2}[aa^\dagger|n\rangle + a^\dagger a|n\rangle] \\
 H|n\rangle &= \frac{1}{2}[aa^\dagger|n\rangle + a^\dagger a|n\rangle], \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

pelas equações (A.12) temos que:

$$\begin{aligned}
 H|n\rangle &= \frac{1}{2}(a\sqrt{n+1}|n+1\rangle + a^\dagger\sqrt{n}|n-1\rangle) \\
 H|n\rangle &= \frac{1}{2}(\sqrt{n+1}a|n+1\rangle + \sqrt{n}a^\dagger|n-1\rangle) \\
 H|n\rangle &= \frac{1}{2}(\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle + \sqrt{n}\sqrt{n}|n\rangle) \\
 H|n\rangle &= \frac{1}{2}((n+1)|n\rangle + (n)|n\rangle) \\
 H|n\rangle &= \frac{1}{2}(n+1+n)|n\rangle = \frac{1}{2}(2n+1)|n\rangle \\
 H|n\rangle &= \underbrace{\left(n + \frac{1}{2}\right)}_{E_n}|n\rangle \tag{A.17}
 \end{aligned}$$

onde

$$E_n = n + \frac{1}{2} \tag{A.18}$$

é o autovalor de energia do hamiltoniano do oscilador harmônico bosônico, que encontramos na seção 3.1.

APÊNDICE B

CONSTRUÇÃO DOS OPERADORES FERMIÔNICOS A PARTIR DOS OPERADORES DE SPIN 1/2

Matematicamente os operadores b e b^\dagger podem ser expressos a partir das matrizes de Pauli. Fisicamente, esses operadores representam um sistema de spin 1/2, onde esse sistema nada mais é que um sistema que inclui elétrons, prótons, nêutrons, quarks, neutrinos, que são férmions.

As matrizes de Pauli são expressas por (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

e, para expressar b e b^\dagger em termos das matrizes de Pauli, vamos lembrar da construção dos operadores spins S_x e S_y , onde:

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (\text{B.2})$$

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (\text{B.3})$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|) \quad (\text{B.4})$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} (-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|). \quad (\text{B.5})$$

Sabendo que os operadores não-hermitianos são definidos como:

$$S_\pm = \hbar|\pm\rangle\langle\mp| \quad (\text{B.6})$$

substituimos (B.6) em (B.4) e em (B.5) e obtemos:

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \quad (\text{B.7})$$

$$S_y = \frac{i}{2} (-S_+ + S_-). \quad (\text{B.8})$$

Vamos agora, a partir de (B.7) e (B.8) construir as matrizes S_x e S_y . Assim, fazendo a seguinte correspondência: $1 \rightarrow +$ e $2 \rightarrow -$. Temos:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \langle 1 | S_x | 1 \rangle = \langle + | \frac{1}{2} (S_+ + S_-) | + \rangle \\ a_{11} &= \langle + | \frac{1}{2} (\hbar | + \rangle \langle - | + \hbar | - \rangle \langle + |) | + \rangle \\ a_{11} &= \frac{\hbar}{2} \langle + | (| + \rangle \langle - | + | - \rangle \langle + |) | + \rangle \\ a_{11} &= \frac{\hbar}{2} \left(\overbrace{\langle + | + \rangle}^1 \underbrace{\langle - | + \rangle}_0 + \overbrace{\langle + | - \rangle}^0 \underbrace{\langle + | + \rangle}_1 \right) \\ a_{11} &= 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos a_{12} , a_{21} e a_{22} :

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{\hbar}{2}; \\ a_{21} &= \frac{\hbar}{2}; \\ a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Desse modo, a matriz S_x é escrita como:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_x}$$

ou

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x. \quad (\text{B.9})$$

De forma semelhante, encontramos a matriz S_y dada por

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y. \quad (\text{B.10})$$

Vamos reescrever (B.7) e (B.8) na forma:

$$\frac{2}{\hbar} S_x = | + \rangle \langle - | + | - \rangle \langle + | \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{2i}{\hbar} S_y = | + \rangle \langle - | - | - \rangle \langle + |. \quad (\text{B.12})$$

Somando (B.11) com (B.12), obtemos

$$\frac{2}{\hbar} S_x + \frac{2i}{\hbar} S_y = | + \rangle \langle - | + | - \rangle \langle + | + | + \rangle \langle - | - | - \rangle \langle + |$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\hbar}(S_x + iS_y) &= 2|+\rangle\langle -| \\ S_x + iS_y &= \underbrace{\hbar|+\rangle\langle -|}_{S_+} \\ S_+ &= S_x + iS_y\end{aligned}\tag{B.13}$$

substituindo (B.9) e (B.10) em (B.13), resulta em

$$\begin{aligned}S_+ &= \frac{\hbar}{2}\sigma_x + i\frac{\hbar}{2}\sigma_y \\ S_+ &= \frac{\hbar}{2}(\sigma_x + i\sigma_y).\end{aligned}\tag{B.14}$$

Subtraindo (B.10) de (B.9) e realizando todo o processo anterior, encontramos que

$$S_- = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x - i\sigma_y).\tag{B.15}$$

Quando S_+ opera em um *ket* de spin para baixo, $|-\rangle$, temos um *ket* $|+\rangle$. Todavia, se S_+ atua num *ket* de spin para cima, $|+\rangle$, o resultado é nulo. Isso porque o *ket* já atingiu o seu valor máximo. Analogamente, quando aplicamos S_- em um *ket* de spin para cima, o resultado é um *ket* de spin para baixo. Se este operador atua em um *ket* de spin para baixo, o *ket* resultante é nulo, pois o estado atingiu seu valor mínimo (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013). Expressamos matematicamente o presente enunciado, utilizando (B.6), para $\hbar = 1$, como:

$$S_+|-\rangle = |+\rangle\tag{B.16}$$

$$S_+|+\rangle = 0\tag{B.17}$$

$$S_-|+\rangle = |-\rangle\tag{B.18}$$

$$S_-|-\rangle = 0.\tag{B.19}$$

Desse modo, podemos definir S_- como o operador não-hermitiano fermiônico de destruição (b) e S_+ como operador não-hermitiano fermiônico de criação (b^\dagger), assim, reescrevendo (B.14) e (B.15), considerando $\hbar = 1$:

$$b^\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y); \quad b = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y).\tag{B.20}$$

B.1 Campo magnético uniforme e as relações de comutação entre os operadores fermiônicos

Se lembrarmos do campo magnético uniforme de um elétron, que aponta na direção z , ou seja, $B_0\hat{k}$ e lembrando que o hamiltoniano de uma partícula de spin 1/2 carregada girando em repouso em um campo magnético B é dada por (GRIFFITHS, 2011):

$$H = -\gamma\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}\tag{B.21}$$

temos

$$H = -\gamma B_0 S_z \quad (\text{B.22})$$

onde:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

substituindo (B.23) em (B.22), obtemos

$$H = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_z} = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \sigma_z, \quad (\text{B.24})$$

por (B.24) vemos que o hamiltoniano de um férmion, é proporcional à σ_z . Ou seja, considerando $\gamma = -B_0 = \hbar = 1$, podemos escrevê-lo como

$$H = \frac{1}{2} \sigma_z; \quad \sigma_z = 2H. \quad (\text{B.25})$$

Anexos

ANEXO A

AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO DE POTENCIAIS INVARIANTES DE FORMA

Table 1. Scattering amplitudes for all known shape-invariant one-dimensional potentials ($\hbar = 2m = 1$). The wavenumbers k and k' are defined by (5) in the text with $W_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x)$. Note that oscillator and infinite square well potentials, which are shape invariant, have no scattering and hence are not tabulated here.

Name of potential	Superpotential $W(x)$	Potential $V_-(x; a_0)$	Scattering amplitudes
Morse	$A - B e^{-\alpha x}$	$A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) e^{-\alpha x}$	$R(k') = \frac{(2\lambda)^{-2iq} \Gamma(-s - iq) \Gamma(2iq)}{\Gamma(-s + iq) \Gamma(-2iq)}$; $s \equiv \frac{A}{\alpha}$, $\lambda \equiv \frac{B}{\alpha}$, $q \equiv \frac{k'}{\alpha}$
Symmetric Rosen-Morse	$A \tanh \alpha x$	$A^2 - A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x$	$T(k) = \frac{\Gamma(-s - iq) \Gamma(s + 1 - iq)}{\Gamma(-iq) \Gamma(1 - iq)}$; $R(k) = T(k) \frac{i \sin \pi s}{\sinh \pi q}$; $s \equiv \frac{A}{\alpha}$, $q \equiv \frac{k}{\alpha}$
Rosen-Morse	$A \tanh \alpha x + \frac{B}{A}$	$A^2 + \frac{B^2}{A^2} + 2B \tanh \alpha x - A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x$	$W_-^2 < E < W_+^2$: $R(k) = \frac{\Gamma(2iq) \Gamma(-s + q' - iq) \Gamma(s + 1 + q' - iq)}{\Gamma(-2iq) \Gamma(-s + q' + iq) \Gamma(s + 1 + q' + iq)}$ $E > W_+^2$: $T(k) = \frac{\Gamma(-s - iq' - iq) \Gamma(s + 1 - iq' - iq)}{\Gamma(-2iq) \Gamma(1 - 2iq')}$; $R(k) = \frac{T(k) \Gamma(2iq) \Gamma(1 - 2iq')}{\Gamma(-s - iq' + iq) \Gamma(s + 1 - iq' + iq)}$ $s \equiv \frac{A}{\alpha}$, $q \equiv \frac{k}{2\alpha}$, $q' \equiv \frac{k'}{2\alpha}$
	$A \tanh \alpha x + B \operatorname{sech} \alpha x$	$A^2 + (B^2 - A^2 - A\alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x + B(2A + \alpha) \operatorname{sech} \alpha x \tanh \alpha x$	$T(k) = \frac{\Gamma(-s - iq) \Gamma(s + 1 - iq) \Gamma(\frac{1}{2} + i\lambda - iq) \Gamma(\frac{1}{2} - i\lambda - iq)}{\Gamma(-iq) \Gamma(1 - iq) \Gamma^2(\frac{1}{2} - iq)}$ $R(k) = T(k) (\cos \pi s \sinh \pi \lambda \operatorname{sech} \pi q + i \sin \pi s \cosh \pi \lambda \operatorname{cosech} \pi q)$ $s \equiv \frac{A}{\alpha}$, $\lambda \equiv \frac{B}{\alpha}$, $q \equiv \frac{k}{\alpha}$

¹ KHARE, A.; SUKHATME, U. P. Scattering amplitudes for supersymmetric shape-invariant potentials by operator methods. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 21, n. 9, p. L501, 1988. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/21/i=9/a=005>>.