

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GLEYCIANNE ARAUJO ALVES

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA
TRIGONOMETRIA**

São Luís
2017

GLEYCIANNE ARAUJO ALVES

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA
TRIGONOMETRIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva

São Luís

2017

Alves, Gleycianne Araujo

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA
TRIGONOMETRIA** / Gleycianne Araujo - 2017

73.p

Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, 2017.

Orientador: João de Deus Mendes da Silva

1. Modelagem Matemática 2. Aprendizagem significativa 3. Trigonometria. I.Título.

GLEYCIANNE ARAUJO ALVES

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 20/02/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva (Orientador)
Doutor em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Profª. Dr^a Valdiane Sales Araujo
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. João Coelho Silva Filho
Doutor em Matemática
Universidade Estadual do Maranhão

Dedico este trabalho aos meus amores Ilza,
Willian, Allan e Thayze.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelas inúmeras bênçãos e proteções a mim concedidas ao longo da minha vida.

A minha família e amigos pelo apoio e encorajamento, principalmente nos momentos de dificuldades.

A todos os meus colegas do mestrado pelo companheirismo e pela troca de conhecimentos.

Aos professores pela dedicação e pelos conhecimentos compartilhados durante todo o curso, em especial ao meu orientador Dr. João de Deus.

Enfim, a todos que acreditaram em mim e, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Obrigada!

“Cada sonho que você deixa pra trás, é um pedaço do seu futuro que deixa de existir”.

Steve Jobs

RESUMO

O objetivo deste trabalho é contribuir no âmbito acadêmico com o tema, para tanto, o trabalho é fundamentado em uma pesquisa bibliográfica que toma por base um olhar crítico acerca do ensino tradicional da Matemática, com enfoque na Trigonometria. Assim, serão apresentadas as principais concepções sobre a Modelagem Matemática, bem como o contexto histórico e fundamentação teórica da Trigonometria, além de apresentadas duas propostas práticas de modelagem para sala de aula, sob perspectiva dessa metodologia de ensino.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Aprendizagem significativa. Trigonometria.

ABSTRACT

The objective of this work is to spread the discussion on the subject in the academic environment. Thereunto, the work is based on a literature search that is based on a critical eye on the traditional mathematics teaching, with a focus on trigonometry. Thus, the main concepts will be presented on Mathematical Modeling and the historical context and theoretical foundation of Trigonometry, and present two practical proposals for modeling for the classroom.

Keywords: Mathematical Modeling. Motivating learning. Trigonometry.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	11
1 INTRODUÇÃO	12
2 A MODELAGEM MATEMÁTICA	14
2.1 Modelos e Modelagem Matemática	14
2.2 Modelagem na Educação Matemática	17
2.3 Modelagem Matemática em sala de aula	18
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA TRIGONOMETRIA	23
3.1 Breve histórico da Trigonometria	23
3.2 Trigonometria no Triângulo	28
3.2.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo	28
3.2.2 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	30
3.2.3 Lei dos Senos	31
3.2.4 Lei dos Cossenos	32
3.3 Trigonometria na Circunferência	34
3.3.1 Circunferência Trigonométrica	34
3.3.2 Seno, Cosseno e Tangente no Círculo Trigonométrico	37
3.4 Funções trigonométricas	39
3.4.1 Função Seno	39
3.4.2 Função Cosseno	40
3.4.3 Função Tangente	42

3.4.4	Relação Trigonométrica Fundamental	43
4	PROPOSTAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	45
4.1	Medindo alturas com o teodolito artesanal	46
4.1.1	Contextualização do problema	46
4.1.2	Criação do teodolito experimental	47
4.1.3	Medindo com teodolito artesanal	49
4.1.4	Síntese da atividade	51
4.2	Trigonometria no horário de verão	53
4.2.1	Interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia	53
4.2.2	Coleta das informações iniciais	54
4.2.3	Investigação dos parâmetros	58
4.2.4	Síntese da atividade	66
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
	Referências	70
	Apêndice	72

Lista de Figuras

2.1	A situação inicial e a situação final na Modelagem Matemática.	16
2.2	Esquema de processo de Modelagem Matemática proposto por Biembengut	22
3.1	Papiro <i>Rhind</i>	24
3.2	Ilustração Pirâmide do problema 56 do papiro <i>Rhind</i> I.	24
3.3	Ilustração Pirâmide do problema 56 do papiro <i>Rhind</i> II.	25
3.4	Medição da altura das Pirâmides	25
3.5	<i>Plimpton 322</i>	26
3.6	<i>Almagesto</i>	27
3.7	Elementos notáveis no triângulo retângulo	28
3.8	Triângulo retângulo (relações métricas)	29
3.9	Triângulos formados sob um ângulo α	30
3.10	Triângulo retângulo formado sob um ângulo α	31
3.11	Triângulo inscrito	31
3.12	Triângulos formados partir da perspectiva de um ponto P	32
3.13	Circunferência de raio 1	34
3.14	Circunferência dividida por quadrantes	34
3.15	Arco Nulo	35
3.16	Semicircunferência	35
3.17	Arco de uma volta	35
3.18	Arco de 360°	35
3.19	Arco de 180°	35
3.20	Arco de 90°	35

3.21	Arco de 270°	35
3.22	Arco de 55°	36
3.23	Arco de 2 rad	36
3.24	Ponto P na circunferência	37
3.25	Segundo Quadrante $\text{sen} > 0$ e $\text{cos} < 0$	38
3.26	Terceiro Quadrante $\text{cos} < 0$ e $\text{sen} < 0$	38
3.27	Quarto Quadrante $\text{cos} > 0$ e $\text{sen} < 0$	38
3.28	Comportamento do seno e cosseno nos quadrantes	38
3.29	Segundo Quadrante $\text{tg } \theta < 0$	39
3.30	Terceiro Quadrante $\text{tg } \theta > 0$	39
3.31	Quarto Quadrante $\text{tg } \theta < 0$	39
3.32	Ponto P e sua projeção ortogonal no eixo das ordenadas	39
3.33	Gráfico da função $\text{sen}(x)$	40
3.34	Ponto P e sua projeção ortogonal no eixo das abcissas	41
3.35	Gráfico da função $\text{cos}(x)$	41
3.36	Ponto T e sua interseção com o eixo das tangentes	42
3.37	Gráfico da função $\text{tg}(x)$	43
3.38	Ciclo trigonométrico e o ponto M	44
4.1	Teodolito ou Circulo de borda	47
4.2	Teodolito estação total	47
4.3	Materiais necessários para construção do teodolito artesanal	48
4.4	Confecção do teodolito I	48
4.5	Confecção do teodolito II	48
4.6	Teodolito pronto	49
4.7	Ângulo apontado pelo teodolito	49
4.8	Esquema de observação da árvore	50

4.9	Linha do Equador	53
4.10	Representação gráfica da duração dos dias em Porto Alegre em 2015	58
4.11	Teste do parâmetro A	59
4.12	Teste do parâmetro B	61
4.13	Teste do parâmetro C	62
4.14	Teste do parâmetro D	63
4.15	Gráfico do modelo encontrado	64
4.16	Gráfico do modelo e pontos de início e término do horário de verão	65

Lista de Tabelas

3.1	Unidades de medidas da circunferência	36
4.1	Informações obtidas através do teodolito	50
4.2	Horário do nascer do sol em Porto Alegre-RS no ano de 2015	55
4.3	Horário do nascer do sol em Porto Alegre - RS no ano de 2015 com duração dos dias	57
5.1	Tabela Trigonométrica Cosseno	73

1 INTRODUÇÃO

As práticas do ensino tradicional da Matemática cada vez mais vão se evidenciando pouco eficientes, principalmente, porque abordam conceitos alheios ao cotidiano dos estudantes, o que implica no distanciamento dos mesmos com a matéria. Por essa razão, devem ser trazidas para sala de aula novas metodologias e tecnologias, que aproximem os conteúdos matemáticos de suas aplicabilidades e, conseqüentemente, dos alunos.

A sociedade exige que as escolas habilitem os seus alunos para que estes, de forma autônoma, sejam capazes de se perceberem como agentes capazes de raciocinar com base nos conhecimentos já adquiridos e refletir por si só, sem a necessidade de decorar assuntos que na maioria das vezes são vistos como utilizáveis apenas para responder provas.

A Modelagem Matemática é uma metodologia de ensino que aborda situações reais e as traduzem para linguagem matemática, porém enquanto alternativa pedagógica, ainda é pouco difundida no meio acadêmico, destarte o objetivo deste trabalho é apresentar as concepções de Modelagem Matemática, com intuito de proporcionar aos professores o conhecimento dessa tendência de ensino, com enfoque na Trigonometria.

A Trigonometria é um dos tópicos mais antigos da matemática, e sua aplicabilidade em problemas do cotidiano foi peça fundamental para o desenvolvimento da humanidade. Por meio de sua premissa básica, a relação entre as medidas dos ângulos de um triângulo e seus lados, que hoje pode-se calcular grandes distâncias. Também foi com base nos conhecimentos de Trigonometria que se pautaram as grandes navegações que se aventuravam em mar aberto, utilizando instrumentos náuticos, como o astrolábio e a bússola, que funcionavam baseando-se nas estrelas ou no sol.

Um exemplo atual da contribuição da Trigonometria são as rotas traçadas por computadores para que um avião chegue ao seu destino, estes computadores utilizam os mesmos princípios que os pioneiros neste ramo da Matemática. Antes as referências eram as estrelas, hoje são os GPS e satélites (LOPES, CAVICHILO et al).

Dessa maneira, por entender que a Modelagem Matemática é capaz de aguçar a

criatividade dos alunos, torná-los agentes centrais do seu próprio aprendizado e evidenciar a aplicabilidade da Matemática no cotidiano, serão apresentados conceitos de Modelagem Matemática e propostas sua aplicabilidade no ensino da Trigonometria aos professores que desejarem aprimorar suas metodologias, saindo do comodismo das aulas tradicionais.

No capítulo 2 é caracterizada a Modelagem Matemática, onde são apresentadas suas principais concepções. Além de esclarecer o significado dos modelos no processo, também serão evidenciados seus benefícios, assim como as barreiras encontradas durante sua aplicação nas escolas.

No capítulo 3 é apresentada a fundamentação teórica acerca da Trigonometria, onde são expostos conteúdos de Trigonometria no ensino básico, iniciando pelo contexto histórico e em seguida são apresentados conceitos e propriedades da Trigonometria no triângulo, no círculo e das funções trigonométricas, conhecimentos estes, necessários para abordagem das propostas de modelagens.

No Capítulo 4 inicia-se o enfoque à parte prática do trabalho, onde serão propostas duas atividades que se iniciam com abordagem de um tema não-matemático que será investigado. Na primeira atividade, “medindo alturas com o teodolito artesanal”, é confeccionando um medidor de ângulos que será peça fundamental no cálculo das alturas dos objetos ao redor da escola. Na segunda atividade, “A trigonometria no horário de verão”, o professor usa a interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia.

2 A MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo serão apresentados conceitos de Modelo Matemático, Modelagem Matemática e o processo para obtenção de um modelo, proposto por Biembengut. As principais referências são: Almeida, Silva e Vertuan (2012), Barbosa (2004), Bassanezi (2011), Biembengut e Hein (2011), Herminio (2009), Nogueira, Martins e Brenzikofer(2008), Ribeiro (2008) e Silva (2014).

2.1 Modelos e Modelagem Matemática

Em decorrência dos avanços tecnológicos e científicos, a sociedade vive em um processo contínuo de transformação, e a escola, como agente partícipe fundamental à sociedade, com a proposta de formar cidadãos criativos e autônomos, deve acompanhar tais mudanças, que cada vez mais exigirão dos educandos capacidades e conhecimentos inerentes a esse processo de avanço.

A Modelagem Matemática, usada como metodologia de ensino, visa suprir essas necessidades, visto que a mesma é baseada na desmistificação do professor como agente central no ensino, entregando este posto aos discentes. Sob o enfoque da Modelagem Matemática, o professor se torna mediador entre o conhecimento e os alunos, estes por meio de atividades investigativas e interdisciplinares, “comandam” o ensino-aprendizagem, e ao final do processo são desenvolvidas criatividade, autonomia e conhecimento.

Antes de versar sobre a Modelagem Matemática, é importante entender o que é um modelo matemático. A palavra “modelo”, apesar de ser um termo com diversos significados, remete a uma definição empírica: “aquilo que serve de exemplo”, ou seja, algo que representa um padrão ideal.

Nesse aspecto, a concepção de um modelo não se limita apenas à Matemática, mas a uma gama de áreas do conhecimento, tais como economia, biologia, arte, literatura etc, e embora o objetivo dos modelos nessas áreas possa ser diferente, a essência é sempre a mesma: descrever as características de algo.

De acordo com Bassanezi (2011, p. 19): “quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela - o processo usual é selecionar no sistema, argumentos ou parâmetro considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo”.

No âmbito matemático, utilizamos modelos para explicar situações que podem ser externas à disciplina, com propósito de descrevê-las e interpretá-las com linguagem Matemática.

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 13) ainda acrescentam: “um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo e explicativo, expresso por meio de linguagem Matemática ou estrutura Matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo realizar previsões sobre este outro sistema”.

Como exemplos de Modelagem Matemática, pode-se citar as seguintes situações: elaboração do orçamento para construção de uma casa; a quantidade de suco que pode ser produzido com uma certa quantidade de maracujás; a forma de determinar o crescimento populacional de determinada comunidade, entre outros.

Diante dessas situações, pode-se, através do emprego do conhecimento matemático adequado e de interpretações voltadas a outras áreas, determinar modelos (linguagem matemática) e utilizá-los como forma de realizar previsões. No entanto, os resultados não se restringem apenas a uma situação específica, pois os mesmos, futuramente, podem vir a servir de base para outras hipóteses.

Biembengut e Hein (2011, p. 12) ressaltam que um modelo não se limita a uma equação ou fórmula: “um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc”.

Aceitando essa concepção, Bassanezi (2011, p.17-18) divide o modelo, quanto à forma de representar um sistema, em dois tipos:

Modelo objeto - é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictóricas (um desenho, um esquema compartimental, um mapa etc), conceitual ou simbólica.

Modelo teórico - é aquele vinculado a uma teoria geral existente - será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses ou de experimentos.

Em termos mais explícitos, a Modelagem Matemática é a vertente pela qual se chega ao modelo. Aceitando essa concepção apresentada por Almeida, Silva e Vertuan a modelagem é o processo da busca por determinada solução, na qual chegamos ao modelo. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 15).

Bassanezi (2011, p. 16) acrescenta: “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 12) acreditam que a modelagem parte de uma situação inicial denominada “situação-problema” e caminha para uma situação final que representa uma solução, denominada “modelo matemático”, utilizando-se de um conjunto de procedimentos capazes de ligar a situação inicial à final. E ainda ilustram seus entendimentos:

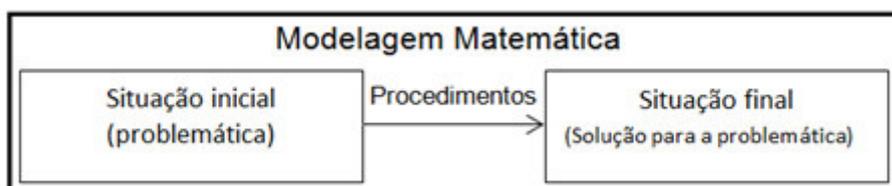


Figura 2.1: A situação inicial e a situação final na Modelagem Matemática.

Ilustrando os conceitos apresentados com um modelo matemático: investigação da quantidade de mercúrio liberado para o meio ambiente em função de uma lâmpada fluorescente quebrada.

Situação Inicial: mercúrio contido em lâmpada fluorescente e contaminação do ambiente onde são descartadas.

$$\text{Modelo Matemático: } Q(t) = (43200 - 8400\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} + 8400\sqrt{2} + 16800.$$

Conhecimento matemático: para obtenção desse modelo é necessário utilizar da soma de PG finita, progressão geométrica, função exponencial e recorrência.

Tomando por base as definições apresentadas é de imediata percepção que a finalidade de todas as concepções supracitadas é a obtenção do modelo. Contudo, o processo de modelagem não se finda exatamente nesse ponto. Após a “descoberta” do modelo, este ainda passará pelo processo de validação, que é o momento de constatação de fidedignidade, para tanto, a situação real será retomada e verificada.

Nesse momento, pode-se aplicar a demais situações oriundas do problema inicial, a fim de obter previsões, projeções e estratégias. Dessa maneira, outra vantagem do uso de modelos é a economia, uma vez que as conclusões obtidas poderão ser válidas para cada situação particular (NOGUEIRA, MARTINS e BRENIKOFER, 2008, p.15).

Flemming, Luz e Mello (2005, p. 26) completam: “Diante de um problema do mundo real é possível selecionar variáveis e delinear o modelo. Por sua vez, o modelo produz informações importantes para a criação de alternativas de solução”.

Alguns pesquisadores, diante de suas experiências, indicam algumas etapas metodológicas para a Modelagem Matemática. Será explicada uma dessas etapas em outra sessão.

2.2 Modelagem na Educação Matemática

Ao buscar novos caminhos para educação, utilizam-se práticas diferenciadas das habituais, e diante dos êxitos em sala de aula, esses caminhos vão cada vez mais se consolidando e tornando-se tendências. Com a perspectiva da utilização da Modelagem Matemática no contexto educacional, a mesma é considerada uma tendência na Educação Matemática.

Para Lopes e Borba (1994, *apud* Fleming, Luz e Mello, 2015, p.15) uma tendência é uma forma de trabalho que surgiu fundamentada na busca de soluções para os problemas da Educação Matemática. A partir do momento que é usada por muitos professores ou, mesmo que pouco utilizada, resulte em experiências bem sucedidas, estamos diante de uma tendência, os autores exemplificam com a Educação Matemática crítica, a etnomatemática, a Modelagem Matemática, o uso de computadores e a escrita na Matemática.

É válido destacar que a Modelagem Matemática voltada à educação possui influência significativa da Matemática Aplicada.

Segundo Miola e Silveira (2008, p. 58 *apud* Silva, 2014, p. 19):

A Modelagem Matemática tem sua origem na Matemática aplicada, sendo utilizada entre os matemáticos aplicados como um meio para obtenção de um modelo matemático (fórmulas, equações, gráficos, tabelas, etc) que expliquem uma situação da realidade.

Blum (1989 *apud* Bassanezi, 2011, p.19) faz a seguinte correlação: “o termo aplicação de Matemática denota o fato de utilizar seus conceitos para entendimento de fenômenos do mundo real. Eventualmente, modelos matemáticos, ou mais geralmente, todo argumento matemático que é ou pode ser, de alguma forma, relacionado com a realidade, pode ser visto como pertencente à Matemática Aplicada”.

Através dos próprios aspectos da modelagem matemática, é possível perceber que suas raízes encontram-se na Matemática Aplicada, considerando que esta se utiliza dos conceitos matemáticos para alcançar outros tipos de conhecimentos, no entanto, ao se destacar como um instrumento de apoio pedagógico, a Modelagem Matemática se desconecta da Matemática Aplicada e se expande para a educação matemática, traçando, assim, um caminho próprio.

Para Flemming, Luz e Mello (2005, p. 24): “A Modelagem pode ser utilizada em dois contextos específicos: como ferramenta na resolução de problemas e como metodologia para o processo ensino-aprendizagem da Matemática”.

2.3 Modelagem Matemática em sala de aula

Em virtude da literatura ser repleta de variadas concepções acerca do tema, cabe ao docente analisar esses conceitos e interpretá-los a fim de fundamentar suas aulas. Além disso, a Modelagem Matemática, por se tratar de uma prática que exige contextualização, interdisciplinaridade, conhecimentos históricos, entre outras habilidades, é de fundamental importância, o contínuo aperfeiçoamento por parte do professor.

Um dos quesitos essenciais para o professor implementar a Modelagem Matemática é ter desejo de modificar suas práticas de ensino, se predispor a pesquisar e embasar-se em modelos clássicos e outras experiências no ensino (BIEMBENGUT; HEIN, 2011, p. 29).

Alerta-se que quando as concepções teóricas se desencontram das práticas, o professor pode equivocar-se, ao presumir que está ensinando por meio da modelagem. Um exemplo evidenciado por Biembengut em sua dissertação “Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus” expõe um caso em que um professor propõe que os alunos descubram quanto custa para construir

uma casa. Para tanto, os educandos fazem levantamento do material e preço, realizam os cálculos, porém não chegam a nenhum modelo matemático (BIEMBENGUT, 1990 *apud* BARBOSA, 2001, p. 2).

A constante busca pelo conhecimento em relação ao tema por parte do educador é fundamental e a experiência se obtém de maneira gradual e está diretamente relacionada ao tempo de planejamento das atividades. Muito embora não seja apenas a ausência de confiança e habilidade dos professores para desenvolver a Modelagem Matemática em sala de aula, o entrave na expansão dessa metodologia.

As principais dificuldades na implantação da modelagem que impossibilitam a maior difusão dessa metodologia de ensino são:

1 - o programa dos cursos regulares que muitas vezes são cronologicamente apertados, e como a modelagem pode ser demorada, pode implicar no não cumprimento do conteúdo programático;

2 - o não preparo dos alunos para essa prática, pois não são acostumados a serem os principais agentes do processo de ensino-aprendizagem, além da heterogeneidade de uma sala de aula;

3 - algumas atividades de Modelagem Matemática no decorrer do processo podem exigir conhecimentos que não foram tratados naquela série, sendo assim, o aluno não poderia ter conhecimento suficiente para desenvolver a atividade;

4 - inexistências de disciplinas que tratem da Modelagem Matemática na formação inicial do professor, bem como ausência de predisposição para a formação continuada nessa área (RIBEIRO 2008, BASSANEZI 2011, ALMEIDA, SILVA E VERTUAN 2012, BARBOSA, 2001).

Em relação ao tempo da atividade de Modelagem Matemática, cabe mencionar que nem sempre o cumprimento do currículo garante aprendizagem concreta, o professor por meio de planejamento pode delimitar o tempo de uma atividade de Modelagem Matemática, podendo se estender por semanas, algumas aulas ou até mesmo em uma única aula.

Seria um equívoco e uma visão muito simplista determinar qual o tempo de duração para o processo de Modelagem Matemática, porque as características das atividades estão intimamente ligadas a cada situação de maneira particular, sendo assim, só

cabe ao professor adaptar a prática com as condições que lhes são impostas.

As barreiras naturais do ensino tradicional têm influência significativa no des-
preparo por parte dos educadores no emprego da modelagem em suas metodologias pro-
postas em plano de aula, pois assim como os alunos, alguns professores vivem em uma
zona de conforto, preferindo as situações previsíveis que o ensino tradicional oferece.

Hermínio (2009, p. 17) reforça esse entendimento:

Para professores que nunca trabalharam com essa estratégia pedagógica, é
difícil dar o passo inicial, pois o trabalho com a Modelagem em sala de aula
exige que o docente esteja preparado para possíveis imprevistos, principalmente
quando o tema escolhido para o desenvolvimento do trabalho parte do aluno.
Dessa forma, ao se decidir trabalhar com a Modelagem, o professor estará mi-
grando para a zona de risco.

Outro aspecto é a familiarização do estudante com a Modelagem Matemática,
em algumas situações o aluno pode ser apático à realização do processo, isso porque ele já
está acostumado com a metodologia na qual são receptores do conhecimento transmitido
pelo professor, novamente, cabe ao professor adotar métodos que despertem o interesse
do aluno.

Segundo Bassanezi (2011) esse é o esquema no ensino de um determinado teo-
rema na educação tradicional: “enunciando \rightarrow demonstração \rightarrow aplicação”. No processo
de modelagem, segundo ele, seria o inverso, onde “aplicação” seria a motivação.

Para Ribeiro (2008, p. 71): “Diferentemente num projeto de Modelagem ma-
temática, os alunos veem-se obrigados a produzir novos conhecimentos à medida que
levantam hipóteses, fazem questionamento, resolvem problemas e avaliam soluções”.

Para vencer a apatia dos alunos é importante a seleção de temas voltados aos
seus interesses e a primeira abordagem do tema deve ser caracterizado tal qual um convite
ao conhecimento.

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 26) dividem em três momentos o contato
com os estudantes e a Modelagem Matemática, no primeiro, o professor os coloca em
contato com informações necessárias; no segundo, uma situação problema é sugerida pelo
professor e por fim, no terceiro momento, divididos em grupos, os alunos são responsáveis
pela condução da atividade, ganhando total autonomia.

O fundamental da Modelagem Matemática no contexto educacional é desen-
cadear a formação de novos conhecimentos e conceitos, além de ser uma atividade desa-

fiadora e prazerosa.

Maria Sallet Biembengut, estudiosa e pesquisadora em educação Matemática com foco em Modelagem Matemática, possui diversos artigos e livros publicados, além de ser referência nacional e internacional na área. A mesma defende a ideia de utilizar a Modelagem Matemática, com fins educacionais, em três etapas que podem ser agrupadas: Interação, Matematização e Modelo Matemático.

Segundo a autora, na Interação, ocorre o reconhecimento da situação-problema e a familiarização do assunto a ser modelado, respectivamente, ocorre o momento de entender o que de fato se quer alcançar com o tema escolhido; fase de busca de referencial teórico para expandir o conhecimento a cerca do tema e percebê-lo em sua realidade.

Já a Matematização se subdivide em formulação e resolução do problema em termos matemáticos. Na formulação do problema é o momento de transcrever a situação em linguagem matemática, classificar as informações, identificando quais são relevantes, fazer levantamento de hipóteses, selecionar conhecimentos matemáticos apropriados, determinar variáveis e descrever a situação em termos matemáticos. A resolução do problema é a etapa em que se analisa os problemas resolvidos, podendo ter auxílio de *softwares* ou outros recursos computacionais.

A etapa do Modelo Matemático se divide em interpretação da solução e validação do modelo. Ocorre o momento de verificar que nível as soluções encontradas se aproximam da situação-problema e em seguida, retomar a situação inicial e analisar as implicações decorrentes das soluções encontradas e a confiabilidade da sua utilização (BEIMBENGUT e HEIN, 2011).

A autora ainda afirma: “ao concluir o modelo, se o mesmo não atender as exigências da terceira etapa, retoma-se a segunda etapa, para realização dos devidos ajustes (ajustando hipóteses, variáveis etc)”.



Figura 2.2: Esquema de processo de Modelagem Matemática proposto por Biembengut

Existem outros métodos propostos por diversos autores, porém o modelo de Biembengut e Hein, será aquele utilizado no capítulo que tratará das propostas de Modelagem Matemática.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA TRIGONOMETRIA

Nesse capítulo serão apresentados conteúdos de Trigonometria abordados na educação básica: Trigonometria no triângulo retângulo, no círculo e funções trigonométricas, bem como um breve histórico do desenvolvimento da Trigonometria no processo da evolução humana. Para este capítulo o referencial bibliográfico são: Boyer (1996), Flemming, Luz e Mello (2005), Giovanni e Bonjorno (200), Iezzi (1978), Mol (2013), Oliveira (2015) e Paiva (2004).

3.1 Breve histórico da Trigonometria

A Trigonometria, assim como a própria Matemática, se desenvolveu a partir da necessidade do ser humano em compreender o universo. Considerada um dos ramos mais antigos da Matemática, evoluiu ao longo da história de maneira ramificada, não podendo ser atribuída sua descoberta a um único povo. No entanto, registros históricos apontam que os primeiros a utilizarem, de maneira rudimentar, as noções de Trigonometria foram sumérios que repassaram seus conhecimentos aos antigos egípcios e babilônios.

Segundo Oliveira (2015, p. 36):

Por volta de 2000 a.C. os sumérios, que viveram ao sul da Mesopotâmia, na região do atual Iraque, impulsionados pela busca de soluções nas áreas da Navegação, Geografia, Arquitetura e Astronomia, desenvolveram estudos ligados ao ramo da Matemática hoje conhecido como Trigonometria. Tendo a cultura dos sumérios sido repassada aos babilônios e egípcios, estes aperfeiçoaram os estudos da Matemática para a aplicação na determinação de distâncias inacessíveis, rotas de navegação, no estabelecimento de calendários, na previsão de eclipses, etc.

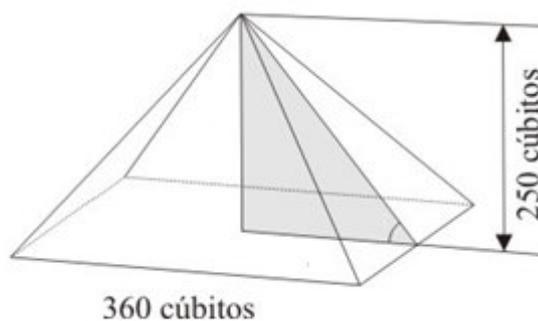
O chamado “*Papiro Rhind*” é uma famosa escritura matemática, encontrada no Egito, de aproximadamente 1650 a.C., é escrito em hierático, possui a forma de um manual e contém a resolução de 85 problemas matemáticos dos mais variados campos, incluindo a Trigonometria, especificamente no problema 56 (OLIVEIRA, 2013).

Figura 3.1: Papiro *Rhind*

O Problema 56 possui conhecimentos primitivos de Trigonometria e uma teoria de triângulos regulares. Os egípcios tinham especial interesse no tema, devido à necessidade das pirâmides possuírem uma inclinação constante das faces.

Atualmente, para medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre os segmentos verticais e horizontais, que é equivalente a maneira usada pelos egípcios, onde o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade de altura, era chamada de *seqt*. A unidade de comprimento utilizada era o cúbito, no caso da distância horizontal, a unidade de medida era a “mão” medindo um sétimo do cúbito (BOYER, 1996, p. 13).

O problema 56 pede o *seqt* de uma pirâmide que tem 250 cúbitos de altura e uma base quadrada com lado de 360 cúbitos.

Figura 3.2: Ilustração Pirâmide do problema 56 do papiro *Rhind* I.

Na resolução, o *seqt* é a razão entre o afastamento horizontal pela altura, o escriba começa a dividir 360 por 2, depois divide o resultado por 250, obtendo $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$.

Como a medida horizontal é dada em mão, ele multiplica o resultado por 7, obtendo $\frac{126}{25}$. Resultado $5 \frac{1}{25}$ mãos por cúbitos.

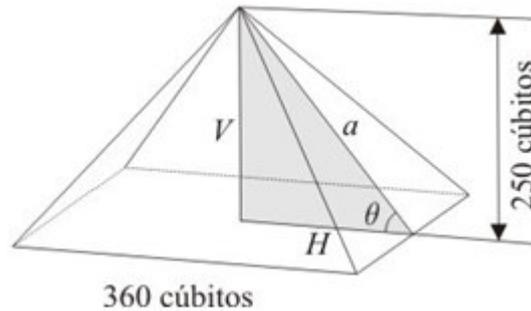


Figura 3.3: Ilustração Pirâmide do problema 56 do papiro *Rhind II*.

Do triângulo retângulo pode-se obter a relação trigonométrica $\cot(\theta) = \frac{H}{V}$. Essa é a relação usada pelos egípcios, onde a cotangente do ângulo formado pela face e pela base da pirâmide é o *seqt*.

Outro aspecto encontrado no antigo Egito, no qual são notadas concepções de Trigonometria é a medição das pirâmides por meio da sombra projetada no chão, para isso os egípcios fincavam uma vara vertical no ponto extremo da sombra e associava sua altura com as horas do dia. Assim, o pequeno triângulo formado pela sombra da vara era semelhante ao triângulo maior, cuja base era o segmento que ia do ponto fincado pela vara e o centro da pirâmide. E utilizando a noção intuitiva de semelhança de triângulos, eles calculavam a altura da pirâmide.

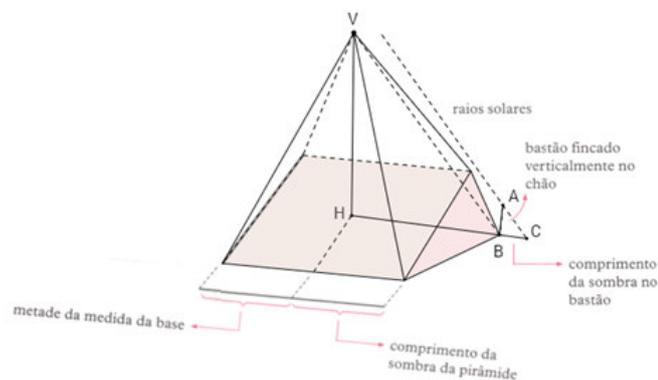


Figura 3.4: Medição da altura das Pirâmides

Muitos dos registros dos babilônios se perderam com o decorrer do tempo. No entanto, um notável registro dos conhecimentos desse povo foi encontrado por arqueólogos com cerca de 400 tábuas de barros, alguma delas continham textos que auxiliavam no resultado dos estudos dos astrônomos babilônios, hoje, alguns desses registros são conhecidos como tábuas trigonométricas. Na figura 3.5, encontra-se ilustrada a *Plimpton 322*.



Figura 3.5: *Plimpton 322*

O astrônomo grego Hiparco de Nicéia criou a primeira tabela trigonométrica, e por esse feito, ganhou o título de pai da Trigonometria. Antes dele, matemáticos gregos como Hipócrates e Eratóstenes estudaram a relação entre retas e círculos, e aplicaram na astronomia, porém seus estudos não resultaram em uma Trigonometria sistemática.

Boyer (1996, p. 110-111) sugere:

Não se sabe bem quando penetrou na matemática o uso sistemático do círculo de 360° , mas parece dever-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas. É possível que ele a tenha tomado de Hipsicles, que anteriormente tinha dividido o dia em 360 partes, subdivisão que pode ter sugerida pela astronomia babilônica. Como Hiparco fez a tabela não se sabe, pois suas obras se perderam.

Indiscutivelmente, com seus estudos, Hiparco contribuiu de maneira notória para a astronomia, em especial em seu observatório na ilha de Rodes, onde fez o famoso catálogo de estrelas, 850 no total, no qual determinava sua posição e a magnitude de seu brilho, além disso, fez calendários e previsão de eclipse (OLIVEIRA, 2013).

Roque e Carvalho (2012 *apud* Oliveira, 2015, p. 18) completam:

Hiparco tem sido considerado como o primeiro a determinar com precisão o nascer e o acaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por ele calculada. Suas tabelas foram construídas para serem usadas na Astronomia, e suas principais contribuições neste campo foram: a organização dos dados empíricos babilônicos; a confecção de um catálogo de estrelas e; a descoberta precessão dos equinócios.

Outro feito que vale ressaltar, provindo do uso do círculo de 360 graus, foi a introdução o termo “1 grau” e conseqüentemente “1 min” (1 grau dividido por 60). No entanto, a mais significativa obra relativa à Trigonometria foi “*syntaxis matemática*”, com cerca de 13 livros, teve como autor Ptolomeu de Alexandria.

Em razão da obra ser considerada de longe superior em comparação com as outras que já haviam sido produzidas, mais tarde na Arábia o livro foi batizado de “*Almagesto*” que significa “o maior”.

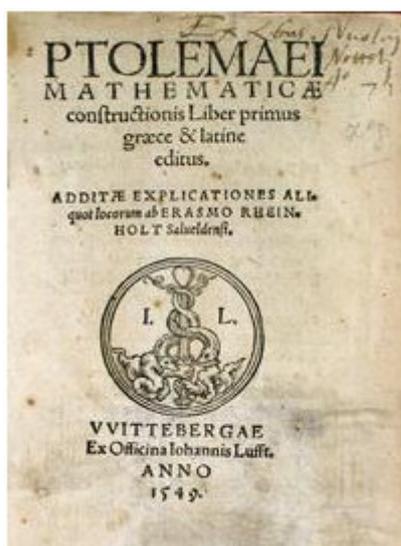


Figura 3.6: *Almagesto*

O período em que viveu Ptolomeu é impreciso, mas alguns historiadores afirmam que o método de cordas no círculo de Hiparco, serviu de base para o *Almagesto*, assim como o catálogo de posição estelar.

Ao contrário de muitas obras da antiguidade o *Almagesto* sobreviveu à passagem implacável do tempo. Por tanto, suas proposições são conhecidas e evidenciadas, assim como os métodos usados para chegar nelas, e uma das mais importantes e usadas até hoje é o “Teorema de Ptolomeu” no qual cita: “se um quadrilátero convexo ABCD é inscrito num círculo, então $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$, ou seja, a soma dos produtos opostos de um triângulo inscritível é igual ao produto das diagonais”.

O que levou Ptolomeu a estudar os movimentos estelares e planetários foi o interesse de compreender a esfericidade do céu, diante desse fato, era motivado a encontrar ferramentas para o estudo da geometria, especialmente o círculo e na esfera. Como exemplo desse pensamento, Mol (2013, p. 56) cita:

Hiparco de Nicéia construiu uma tabela de cordas do círculo e, no século I d.C, Menelau de Alexandria criou a chamada trigonometria esférica e estudou sistematicamente as propriedades de triângulos esféricos. Ptolemeu estendeu os trabalhos de Hiparco e de Menelau, criando um procedimento para o cálculo de cordas subtendidas por arcos de um círculo.

Outro grego que teve relevante participação na construção do ramo da Matemática que hoje denominamos Trigonometria foi Pitágoras. Apesar de ser improvável a autoria do teorema que leva o seu nome, é atribuído a ele o teorema: “em todo triângulo retângulo a área do quadrado constituído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados constituídos sobre os catetos”, com esse teorema foi possível demonstrar a relação trigonométrica fundamental.

3.2 Trigonometria no Triângulo

3.2.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Definição 3.1. Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$, conforme a figura 3.7.

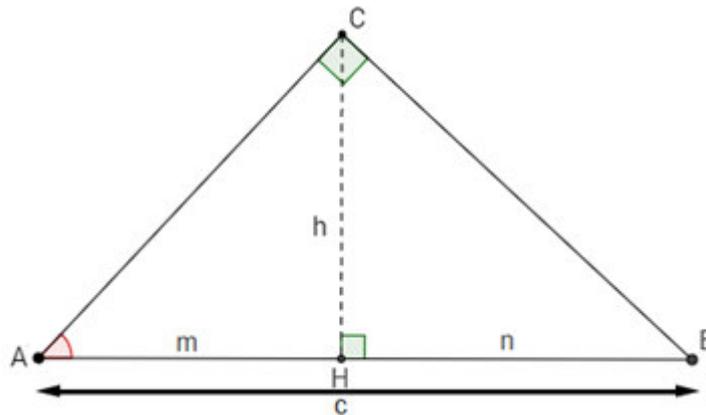


Figura 3.7: Elementos notáveis no triângulo retângulo

Tomando as seguintes informações do triângulo:

- a e b são os catetos
- c é a hipotenusa

- h é a altura relativa à hipotenusa
- m e n são as projeções ortogonais dos catetos b e a , respectivamente.

Pelo caso AAA, temos que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle CBH$ e $\triangle ACH$ são semelhantes.

Colocando os triângulos de maneira que facilite cada correspondência de lados e ângulos, têm-se descrito na figura a seguir:

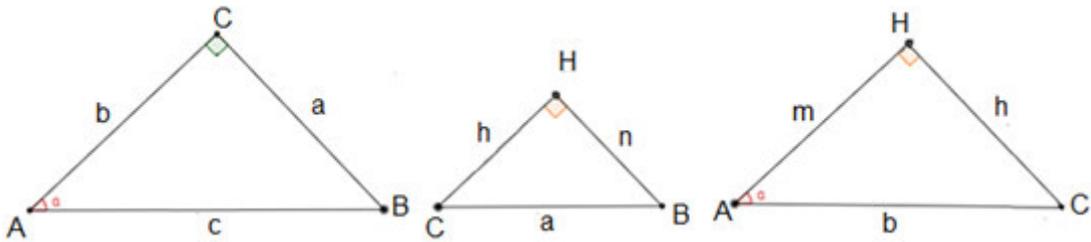


Figura 3.8: Triângulo retângulo (relações métricas)

Então:

O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela, conforme mostra a figura 3.8.

$$\frac{h}{a} = \frac{b}{c} \implies \frac{c}{h} = \frac{b}{a} \quad (3.1)$$

Um cateto ao quadrado é igual à hipotenusa pela projeção ortogonal do cateto.

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{b} \implies b.b = \frac{c}{m} \implies b^2 = \frac{c}{m} \quad (3.2)$$

$$\frac{a}{n} = \frac{c}{a} \implies a.a = \frac{c}{n} \implies a^2 = \frac{c}{n} \quad (3.3)$$

Altura ao quadrado é igual ao produto das projeções ortogonais dos dois catetos.

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \implies h.h = \frac{m}{n} \implies h^2 = \frac{m}{n} \quad (3.4)$$

3.2.2 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Seja um ângulo qualquer de medida α e considerando 4 (quatro) dentre um infinidade de triângulos retângulos que podem se formando de medida α de um de seus ângulos, que são representado pela figura 3.9, a seguir:

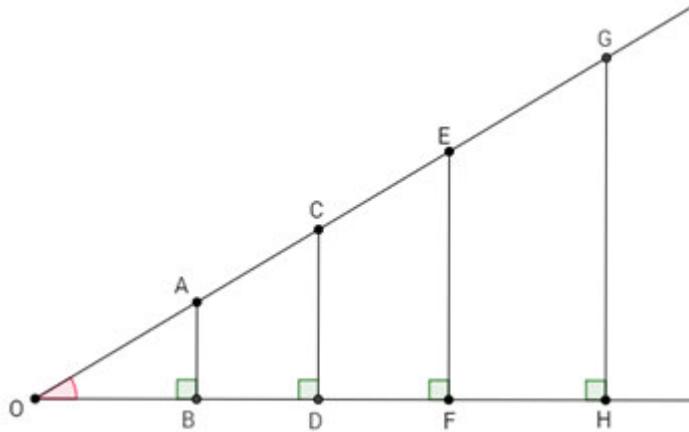


Figura 3.9: Triângulos formados sob um ângulo α

É possível observar que os triângulos OAB, OCD, OEF, OGH são semelhantes, portanto, a razão entre os dois lados quaisquer de um dos triângulos é igual à razão de dois lados correspondentes dos demais, como segue:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = R_1 \quad (3.5)$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = R_2 \quad (3.6)$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = R_3 \quad (3.7)$$

As constantes R_1, R_2, R_3 dependem exclusivamente do ângulo α para serem obtidos. Assim, como os infinitos triângulos criados sob o ângulo α são semelhantes, tomando apenas um dentre os infinitos, pode-se encontrar as constantes.

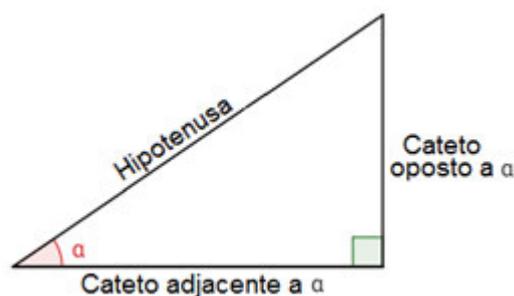


Figura 3.10: Triângulo retângulo formado sob um ângulo α

$$R_1 = \frac{\text{Cateto Oposto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$R_2 = \frac{\text{Cateto Adjacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$R_3 = \frac{\text{Cateto Oposto a } \alpha}{\text{Cateto Adjacente a } \alpha}$$

As razões trigonométricas mostradas, R_1, R_2, R_3 são respectivamente, seno do ângulo α ($\text{sen } \alpha$), cosseno de α ($\text{cos } \alpha$) e tangente de α ($\text{tg } \alpha$).

3.2.3 Lei dos Senos

Definição 3.2. Seja um triângulo ABC, no qual suas medidas dos lados são $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Então: $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração. No caso em que o centro O da circunferência é ponto interior ao triângulo ABC, ou seja, em que o ângulo oposto ao maior lado do triângulo é menor que 90° , conforme a figura 3.11.

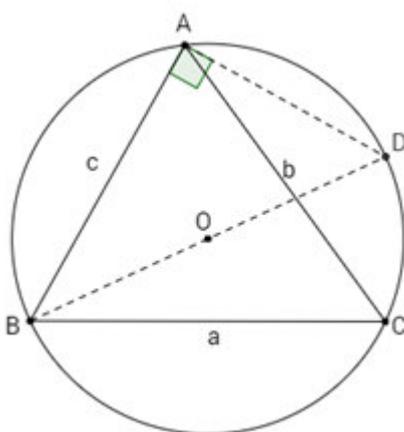


Figura 3.11: Triângulo inscrito

Sendo \overline{BD} o diâmetro da circunferência, temos que o ângulo $\hat{B}AD$ é reto, pois está inscrito em uma semicircunferência, assim:

$$\text{sen}\hat{D} = \frac{AB}{BD}$$

$$\text{sen}\hat{D} = \frac{c}{2R}$$

Observa-se que os ângulos \hat{D} e \hat{C} são congruentes, pois determinam o mesmo arco \widehat{AB} . Logo, vêm:

$$\text{sen}\hat{D} = \text{sen}\hat{C} = \frac{c}{2R} \implies 2R = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

Traçando por A um diâmetro AD' , obtêm-se analogamente $2R = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}}$

Traçando por C um diâmetro AD'' , obtêm-se $2R = \frac{a}{\text{sen}\hat{A}}$

Por fim, chega-se à conclusão que:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R \quad (3.8)$$

□

3.2.4 Lei dos Cossenos

Teorema 3.2.1. *Dado um triângulo ABC e sejam a, b e c medidas de um triângulo qualquer e seja α o ângulo oposto ao maior lado que mede a. Então: $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos\alpha$.*

Demonstração. Considerando $h = \overline{AP}$ (altura do triângulo em relação à base BC). Existem duas possibilidades, conforme ilustra a figura 3.12, existem duas possibilidades:

1. $x < 90^\circ$ (P pertence ao segmento \overline{BC})
2. $x > 90^\circ$ (P não pertence ao segmento \overline{BC}).

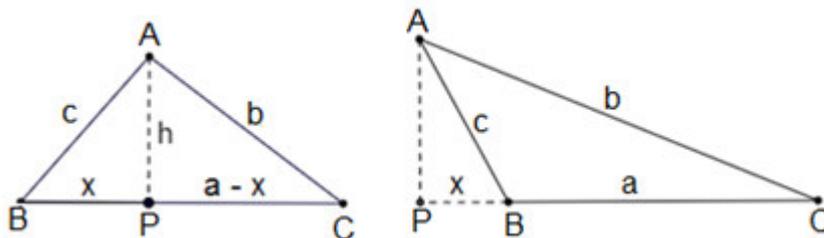


Figura 3.12: Triângulos formados partir da perspectiva de um ponto P

No primeiro caso, seja $x = BP = c \cdot \cos \hat{B}$. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABP e APC, obtêm-se as igualdades:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad (3.9)$$

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ax$$

$$b^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad (3.10)$$

Comparando (3.9) e (3.10), obtêm-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos \hat{B} \quad (3.11)$$

No segundo caso, têm-se que $x = BP - c \cdot \cos(\pi - \hat{B}) = -c \cdot \cos \hat{B}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos APB e APC, vêm:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad (3.12)$$

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ax$$

$$b^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad (3.13)$$

Comparando (3.12) e (3.13), têm-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos \hat{B} \quad (3.14)$$

Portanto, a Lei dos Cossenos vale para qualquer triângulo.

□

3.3 Trigonometria na Circunferência

3.3.1 Circunferência Trigonométrica

A circunferência trigonométrica é representado em um plano cartesiano, onde o Centro da circunferência encontra-se no centro dos eixos coordenados e o raio da circunferência unitário, ou seja, o raio é 1.

Dessa maneira, os eixos do sistema de coordenadas cartesianas dividem a circunferência em 4 partes iguais, que são denominados quadrantes. O sentido positivo é o anti-horário e o negativo é anti-horário e a origem é no ponto $A(1,0)$.

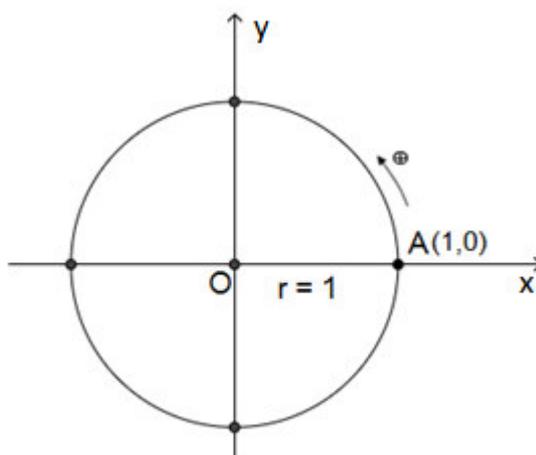


Figura 3.13: Circunferência de raio 1

Cada um dos quatro quadrantes possui as seguintes extremidades, dadas em grau.

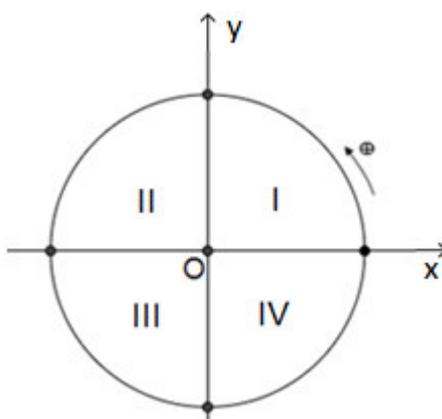


Figura 3.14: Circunferência dividida por quadrantes

Arcos da Circunferência

Definição 3.3. Arco de circunferência é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.

Alguns arcos que merecem destaque, visualizados nas figuras 3.15, 3.16 e 3.17:

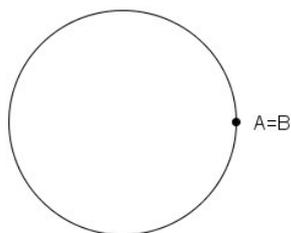


Figura 3.15: Arco Nulo

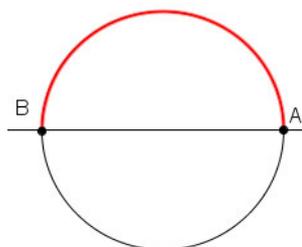


Figura 3.16: Semicircunferência

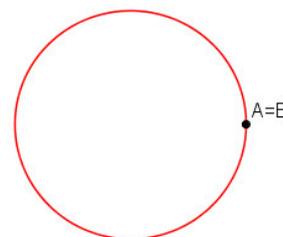


Figura 3.17: Arco de uma volta

Arcos e ângulo e ângulo central da circunferência

Ao dividir uma circunferência em 360 partes iguais, cada parte será um arco de 1° . Isso significa que a circunferência possui 360° .

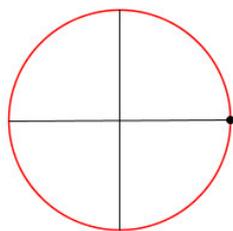


Figura 3.18: Arco de 360°

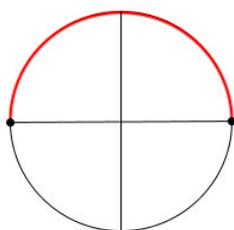


Figura 3.19: Arco de 180°

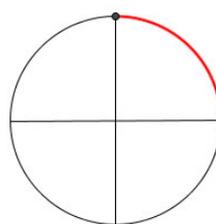


Figura 3.20: Arco de 90°

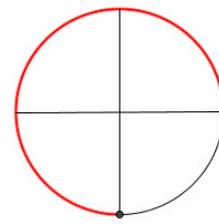
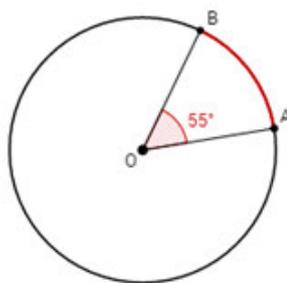


Figura 3.21: Arco de 270°

Lembrando que a medida do grau de um arco é igual à medida do seu ângulo central.

Exemplo na figura 3.22:

Figura 3.22: Arco de 55°

Portanto, o ângulo \widehat{AOB} e o arco \widehat{AB} medem 55° .

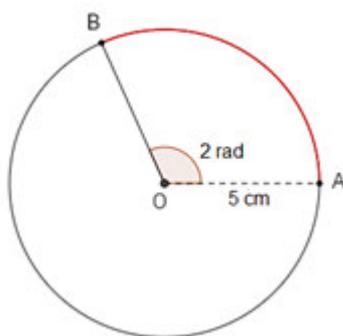
Unidades de medidas

Radiano (denotado: *rad*) é o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que a contém.

Para se determinar a medida de um arco basta dividir o comprimento do arco (l) pela medida do raio da circunferência que o contém (r).

Exemplo 3.1. Medida de um arco \widehat{AB} de comprimento 10 cm.

$$Med(\widehat{AB}) = \frac{l}{r} = \frac{10\text{cm}}{5\text{cm}} = 2\text{rad}$$

Figura 3.23: Arco de 2 rad

Ao comparar as medidas em graus e radiano, têm-se:

Unidade de Medida	Amplitudes				
	Grau	0°	90°	270°	180°
Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabela 3.1: Unidades de medidas da circunferência

3.3.2 Seno, Cosseno e Tangente no Círculo Trigonométrico

Seno e cosseno

Considerando um círculo trigonométrico de raio 1, seja um ponto P, que é imagem do número real x, conforme indica a figura 3.24.

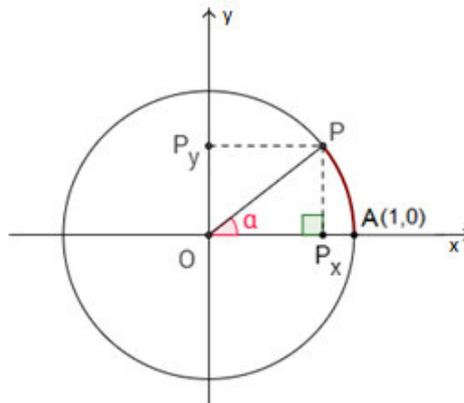


Figura 3.24: Ponto P na circunferência

E considerando, ainda, o arco \widehat{AP} , que corresponde ao ângulo central de medida α . Seja OP o raio da circunferência e P_y e P_x as projeções do ponto P nos eixos y e x. Do triângulo retângulo OP_xP , têm-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{P_xP}{OP} \text{ então } \operatorname{sen} \alpha = OP_x$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{OP_y}{OP} \text{ então } \operatorname{cos} \alpha = OP_y$$

Desse resultado, conclui-se que:

$\operatorname{sen} \alpha$ é a ordenada do ponto P, ou seja, o eixo y é o eixo dos senos.

$\operatorname{cos} \alpha$ é a abscissa do ponto P, ou seja, o eixo x é o eixo dos cossenos.

Diante dessa nova definição, pode-se abranger o estudo trigonométrico, para ângulos de qualquer medida.

Destarte será analisado o comportamento do seno e do cosseno para os demais quadrantes do círculo trigonométrico, com base nas figuras 3.25, 3.26 e 3.27.

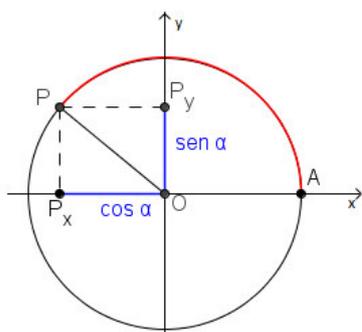


Figura 3.25: Segundo Quadrante $\text{sen} > 0$ e $\text{cos} < 0$

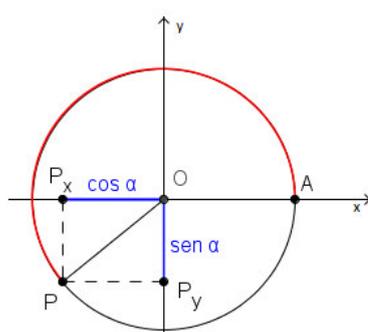


Figura 3.26: Terceiro Quadrante $\text{cos} < 0$ e $\text{sen} < 0$

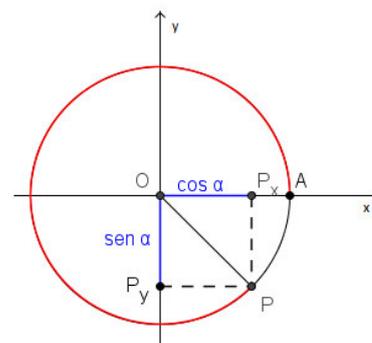


Figura 3.27: Quarto Quadrante $\text{cos} > 0$ e $\text{sen} < 0$

Tangente

Considerando o ciclo trigonométrico da figura e T a intersecção da reta \overline{OP} com o eixo das tangentes (reta perpendicular ao eixo x, que passa pelo ponto A).

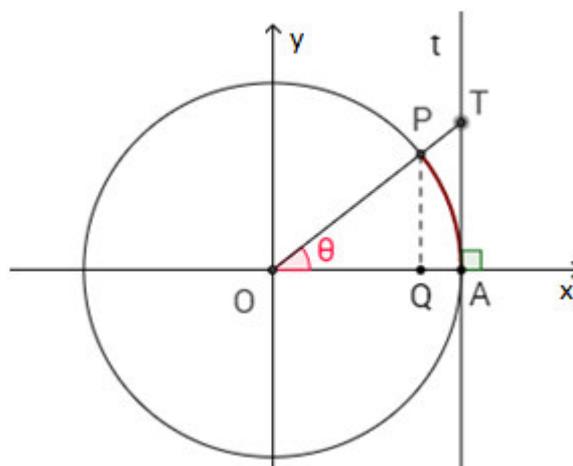


Figura 3.28: Comportamento do seno e cosseno nos quadrantes

Observando a figura 3.28, têm-se o triângulo retângulo ΔOTA , onde verifica-se que:

$$\Delta OPQ \sim \Delta OTA \text{ logo } \frac{OQ}{AO} = \frac{PQ}{TA}$$

Portanto,

$$\frac{\text{cos} \theta}{1} = \frac{\text{sen} \theta}{\text{tg} \theta} \therefore \text{tg} \theta = \frac{\text{sen} \theta}{\text{cos} \theta}, \text{ com } \text{cos} \theta \neq 0, \text{ i.e., } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

A partir desse resultado concluí-se que a tangente do ângulo θ (ou do arco \widehat{AP}) é a ordenada do ponto T.

$$tg\theta = AT \tag{3.15}$$

As figuras seguintes ilustram a tangente nos demais quadrantes do ciclo trigonométrico.

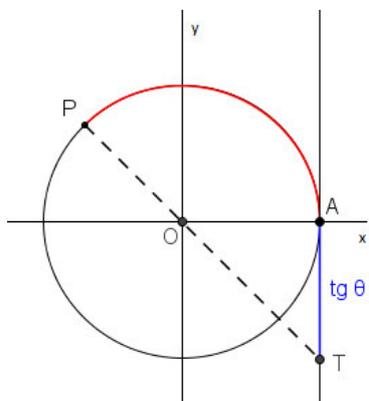


Figura 3.29: Segundo Quadrante $tg\theta < 0$

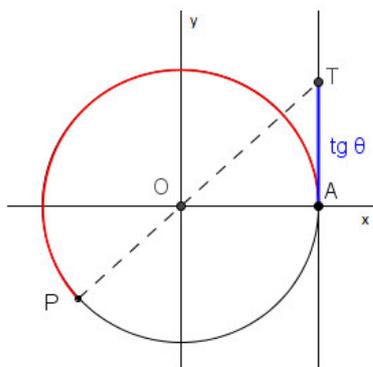


Figura 3.30: Terceiro Quadrante $tg\theta > 0$

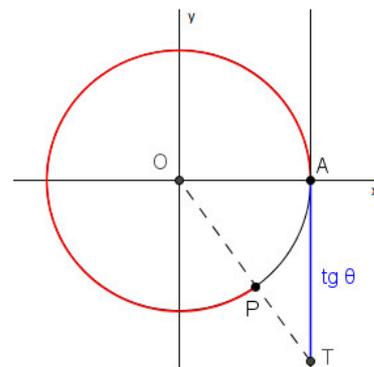


Figura 3.31: Quarto Quadrante $tg\theta < 0$

3.4 Funções trigonométricas

3.4.1 Função Seno

Definição 3.4. Dado um número real x , seja P sua imagem no círculo. Chamamos de seno de x a ordenada \overline{OP}_y do ponto P em relação ao sistema xOy . Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP}_y = sen(x)$, isto é:

$$F(x) = sen(x) \tag{3.16}$$

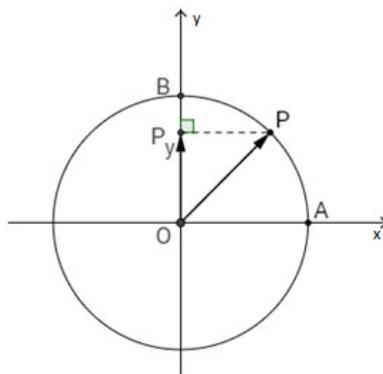


Figura 3.32: Ponto P e sua projeção ortogonal no eixo das ordenadas

Gráfico da função seno

Considerando a $f(x) = \text{sen}(x)$, ao fazer x variar no intervalo $[0, 2\pi]$, obtêm-se uma curva denominada senóide, ilustrada na figura 3.33.

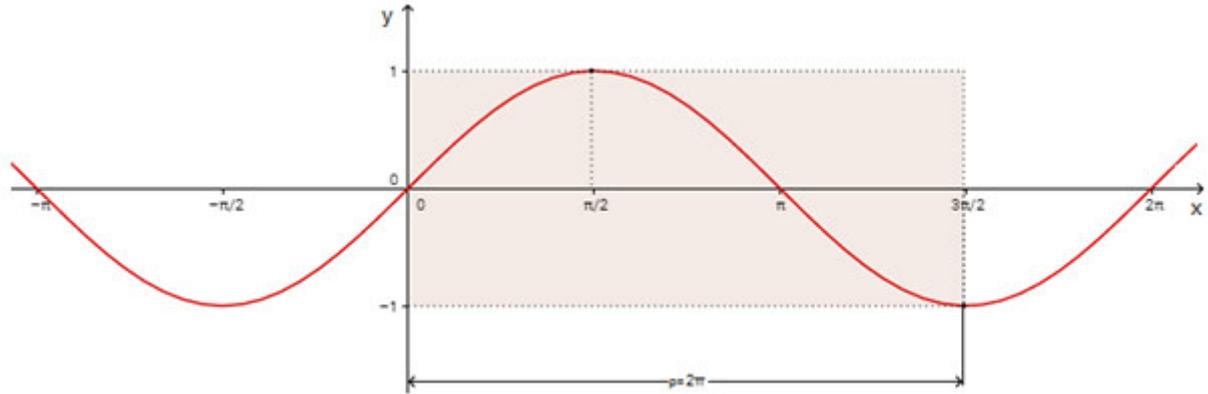


Figura 3.33: Gráfico da função $\text{sen}(x)$

propriedade 3.4.1.

- I. A imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$, ou seja, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, para todo x real.
- II. Se x pertencer ao primeiro ou segundo quadrante, então $\text{sen}(x)$ é positivo.
- III. Se x pertencer ao terceiro ou quarto quadrante, então $\text{sen}(x)$ é negativo.
- IV. Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então $\text{sen}(x)$ é crescente.
- V. Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então $\text{sen}(x)$ é decrescente.
- VI. A função seno é periódica e seu período é 2π .

3.4.2 Função Cosseno

Definição 3.5. Dado um número real x e seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x a abscissa $\overline{OP_x}$ do ponto P em relação ao sistema xOy e função cosseno a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_x} = \text{cos}(x)$, isto é:

$$F(x) = \text{sen}(x) \tag{3.17}$$

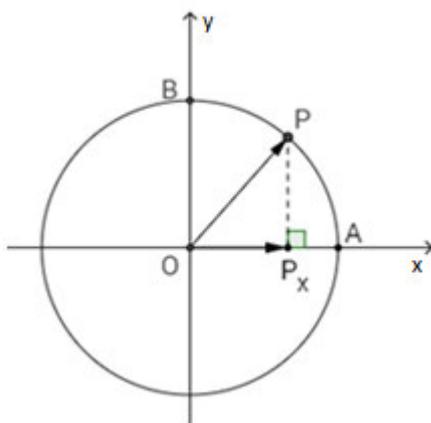


Figura 3.34: Ponto P e sua projeção ortogonal no eixo das abcissas

Gráfico da função cosseno

Considerando a função $f(x)=\cos(x)$ e atribuindo valores a x , no intervalo $[0, 2\pi]$ obtêm-se uma curva chamada cossenóide.

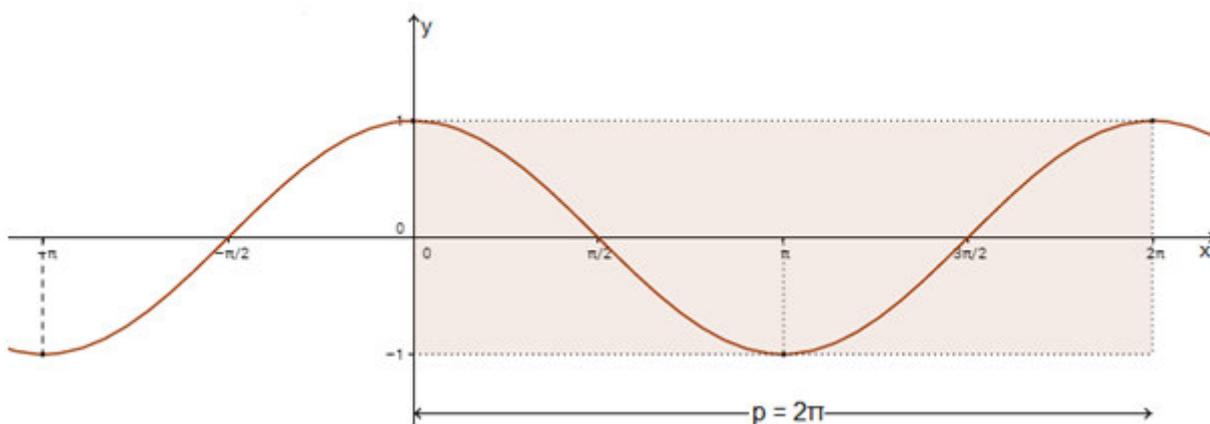


Figura 3.35: Gráfico da função $\cos(x)$

propriedade 3.4.2.

- I. A imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$, ou seja, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, para todo x real.
- II. Se x pertencer ao primeiro ou quarto quadrante, então $\cos(x)$ é positivo.
- III. Se x pertencer ao segundo ou terceiro quadrante, então $\cos(x)$ é negativo.
- IV. Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos(x)$ é crescente.
- V. Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos(x)$ é decrescente.

VI. A função seno é periódica e seu período é 2π .

3.4.3 Função Tangente

Definição 3.6. Dado um número real x ,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{3.18}$$

Seja P sua imagem no círculo, consideramos a reta $h = \overline{OP}$ sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x a medida algébrica do seguimento $h = \overline{AT}$ e função tangente a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , $x \neq \pi + k\pi$, o real $\overline{AT} = \operatorname{tg}x$, isto é:

$$F(x) = \operatorname{tg}(x) \tag{3.19}$$

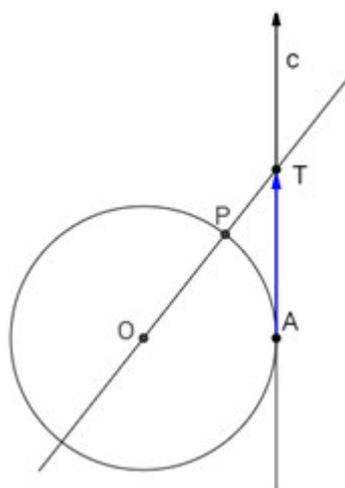
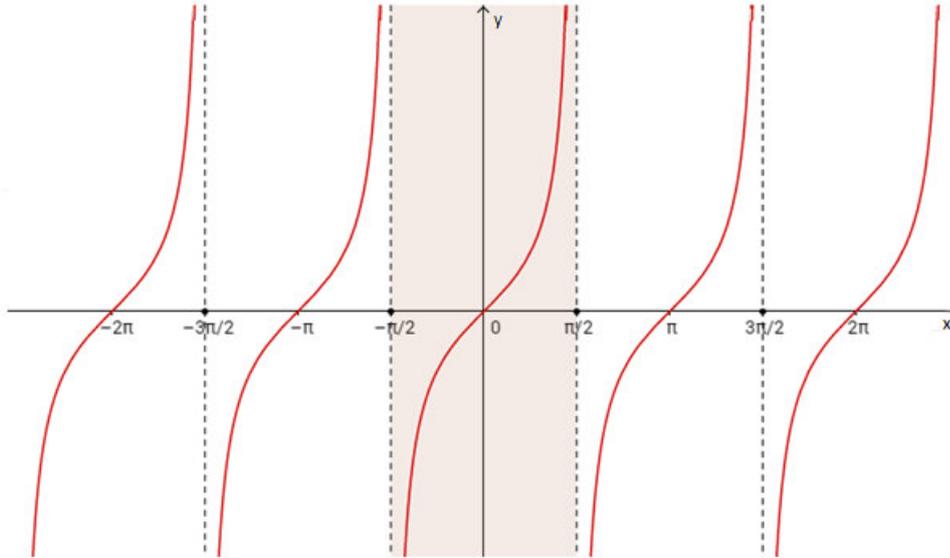


Figura 3.36: Ponto T e sua intersecção com o eixo das tangentes

Gráfico da função tangente

Atribuindo valores ao arco x da função $f(x)=\operatorname{tg}(x)$, obtemos uma curva denominada tangenóide, ilustrada na figura 3.37.

Figura 3.37: Gráfico da função $\text{tg}(x)$ **propriedade 3.4.3.**

- I. O domínio da função tangente é $D \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- II. A imagem da função tangente é \mathbb{R} , isto é, para todo y real existe um x real tal que $\text{tg}(x) = y$.
- III. Se x pertencer ao primeiro ou terceiro quadrante, então $\text{tg}(x)$ é positivo.
- IV. Se x pertencer ao segundo ou quarto quadrante, então $\text{tg}(x)$ é negativo.
- V. Se x percorre qualquer um dos 4 quadrante, então $\text{tg}(x)$ é crescente.
- VI. A função tangente é periódica e seu período é π .

3.4.4 Relação Trigonométrica Fundamental

Teorema 3.4.1. Para todo x real, vale a relação: $\text{sen}^2 + \text{cos}^2 = 1$

Demonstração. Considerando o círculo trigonométrico da figura 3.38:

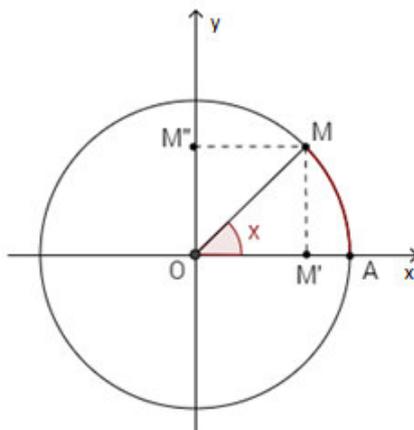


Figura 3.38: Ciclo trigonométrico e o ponto M

Têm-se que:

$$OM = 1$$

$$OM' = \cos x$$

$$OM'' = MM' = \sin(x)$$

No triângulo retângulo, OMM' , através do teorema de Pitágoras, obtêm-se:
 $(MM')^2 + (OM')^2 = (OM)^2 \Rightarrow (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, escrevendo de outra forma, concluí-se:

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

□

4 PROPOSTAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Embora os egípcios não possuíssem recursos tecnológicos que possuímos hoje, conseguiam calcular alturas inacessíveis, essa proeza se dava em decorrência do emprego do conhecimento matemático adequado e alguns mecanismos artesanais simples.

Com o propósito de evidenciar que nem sempre são necessários os conhecimentos formais da Matemática e, assim como fizeram os egípcios e outros povos da antiguidade, com um pouco de criatividade e intuição, é possível extrair definições das próprias práticas e aprender a Matemática de uma maneira diferente da usual.

Neste capítulo serão apresentadas algumas propostas de Modelagem Matemática no ensino da Trigonometria, com elas o referencial teórico abordado no capítulo 3, será revisto sob a ótica da Modelagem Matemática.

Na proposta “medindo alturas com o teodolito artesanal” será investigada a razão trigonométrica tangente em um triângulo retângulo, onde será verificado que com o material concreto pode ser estudado a razão trigonométrica e o comportamento dos ângulos agudos. Na proposta “trigonometria no horário de verão” será abordada a função trigonométrica cosseno, com ênfase nos conceitos de imagem, período, deslocamento vertical e horizontal, para isso será tratado o solstício de verão e sua relação com as funções periódicas.

As principais referências deste capítulo são: Almeida, Silva e Vertuan (2012), Almeida et al (2010), Ana França (2016), Santos (2015) e Souza et al (2012).

4.1 Medindo alturas com o teodolito artesanal

4.1.1 Contextualização do problema

Com base nos mesmos princípios adotados pelos povos antigos, até hoje muitas profissões utilizam o conhecimento da Trigonometria no desenvolvimento de suas atividades. Durante um longo período os astros eram os norteadores de localização na terra, hoje, os satélites instalados pelos próprios homens no espaço, concomitante à utilização dos GPS's que captam sinais emitidos pelos satélites, determinam as localizações com precisão.

No caso do agrimensor que é o profissional que tem por principal função a demarcação dos limites territoriais, Oliveira (2013, p. 98) evidencia o reconhecimento da profissão quando lembra:

Os avanços teóricos e tecnológicos mediante a milenária arte de conhecer e demarcar limites do território vem evoluindo junto à sociedade, e hoje se mostra como uma profissão cuja missão é prover a informação necessária para o conhecimento material e cultural do território, não foi em vão que a nave espacial destinada a viajar além de nosso sistema solar para prover a informação cultural científica do espaço sideral foi batizada como Surveyor (Agrimensor).

Para a realização da agrimensura são necessários instrumentos de medidas e são inúmeros os instrumentos criados pelo homem ao longo de sua história. Alguns, embora criados no início das civilizações, até hoje são utilizados, é o caso do teodolito, capaz de medir áreas e alturas, criado pelas civilizações egípcia e romana, é utilizado na topologia e Agrimensura. É um instrumento ótico usado para medir ângulos verticais e horizontais, com base na triangulação, que consiste em um método que usa a semelhança de triângulos e relações trigonométricas.

O homem é capaz de medir desde a espessura de uma folha de caderno ao diâmetro da lua, dependendo da dimensão do objeto, outros instrumentos e procedimentos podem ser utilizados. Alguns instrumentos de medição que podem ser citados respectivamente pelas dimensões capazes de medir são: micrometro, parquímetro régua, fita métrica, trena, teodolito, altímetro etc.

Para calcular altura de prédios, monumentos, árvores etc, pode-se utilizar o teodolito, com ele, basicamente, é possível medir o ângulo formado por um ponto e o topo do objeto que se quer medir e com alguns conhecimentos matemáticos simples, calcular sua altura.

Conforme Santos (2015, p. 62) assim é caracterizado um teodolito:

O teodolito é montado num tripé, com indicadores de nível, permitindo uma total liberdade de rotação horizontal ou vertical. A composição básica do teodolito consiste em duas partes, a óptica e a mecânica. Utilizam-se de lentes e prismas no seu interior que ao desviar o raio de luz permite uma rápida e simples leitura dos limbos graduados em graus, minutos e segundos.

Comparado com os primeiros tipos de teodolitos criados, o mesmo sofreu uma grande evolução, como as figuras 4.1 e 4.2 podem demonstrar.



Figura 4.1: Teodolito ou Circulo de borda



Figura 4.2: Teodolito estação total

Considerando o interesse em entender o funcionamento de um teodolito, propõe-se a criação, pelos próprios alunos, de um teodolito artesanal experimental, visando estabelecer a relação do ângulo encontrado e altura de um objeto que se tenha na escola (na atividade pode-se trabalhar com objetos, como uma árvore, uma cesta de basquete da quadra, a própria altura da escola, entre outros, o que vale a criatividade dos alunos e do professor).

A utilização desse material concreto, não terá função apenas ilustrativa, a produção do conhecimento será intrínseca a realização das atividades, abordando a razão trigonométrica tangente.

4.1.2 Criação do teodolito experimental

Os materiais necessários para a construção não são oneroso e alguns se encontram na lista de material escolar pedido em algumas escolas.

O teodolito experimental consiste em um barbante preso a um transferidor, cuja base está próxima a um canudo e pendurado ao outro lado do barbante um peso, que pode ser uma borracha ou uma pequena pedra.

Sendo assim são necessários: transferidor de 180°, barbante, canudo, pedaço de papelão, papel cartão, fita adesiva transparente, régua, caneta e uma borracha.



Figura 4.3: Materiais necessários para construção do teodolito artesanal

Primeiro passo: com a fita adesiva transparente cobrir o papelão com o papel cartão, em seguida, com a fita adesiva, prender o transferidor no papelão já encapado.



Figura 4.4: Confeção do teodolito I

Segundo passo: prender o canudo em cima do diâmetro do transferidor, indo do ângulo de 0° ao de 180°.



Figura 4.5: Confeção do teodolito II

Terceiro passo: fixar o barbante no centro do transferidor, precisamente no ângulo de 0° grau e na outra extremidade do barbante, amarrar um peso (pode ser uma

borracha, uma pedrinha etc), por fim, do ângulo de 90° até o final do papelão traçar uma reta com a régua.



Figura 4.6: Teodolito pronto

Com o teodolito pronto, mostrado na figura 4.6, chega-se o momento da utilização.

4.1.3 Medindo com teodolito artesanal

Nessa etapa, o professor pode sugerir que os alunos meçam objetos inacessíveis dentro ou fora da escola.

Supondo a escolha de uma árvore, para iniciar a atividade, algumas indicações do uso do teodolito são essenciais:

1. Para medir a altura da árvore, deve-se olhar o seu topo através do canudo do teodolito.
2. Com a inclinação do canudo, o barbante irá determinar um ângulo no transferidor, o ângulo de interesse da atividade é o complementar ao ângulo indicado.

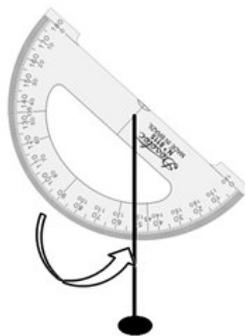


Figura 4.7: Ângulo apontado pelo teodolito

3. É necessário ter o conhecimento prévio da altura da pessoa que está observando.
4. Deve-se medir a distância entre o observador e a base da árvore.

De posse dessas informações, para melhor visualizá-las, pode ser útil a utilização de uma tabela nos moldes da tabela 4.1:

Altura do observador (a)	Distância entre o objeto (d)	Ângulo do medidor (x)	Ângulo complementar (90-x)	Altura do objeto (H)

Tabela 4.1: Informações obtidas através do teodolito

Após os elementos anotados, os alunos em seus grupos devem fazer o esboço da situação prática, esse momento será crucial para determinação do conhecimento matemático necessário para solução do problema e posteriormente na determinação do Modelo Matemático.

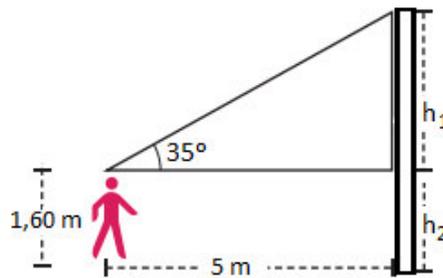


Figura 4.8: Esquema de observação da árvore

Diante do esquema o esperado é que todos percebam que a altura será calculada em duas etapas, primeiramente achando h_1 , onde será necessário usar a relação trigonométrica tangente, como segue:

$$\operatorname{tg}(90 - x) = \frac{h_1}{d}$$

$$\operatorname{tg}35^\circ = \frac{h_1}{5}$$

$$0,7 = \frac{h_1}{5}$$

$$h_1 = 3,5m$$

Como $H = h_1 + h_2$, têm-se:

$$H = h_1 + a \implies H = 3,5 + 1,60 \implies H = 5,10m$$

Nesses termos, encontra-se que a altura da árvore em questão é 5,10 m. No entanto, está é uma solução particular e o objetivo desta atividade de modelagem é determinar um modelo que sirva para qualquer situação, sendo assim, será necessário definir alguns elementos gerais:

Altura do observador = A

Distância do objeto = d

Ângulo marcado = α

$H = h_1 + h_2 =$ Altura do objeto

A partir de então basta realizar os cálculos utilizando os elementos gerais, daí segue o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(90 - x) = \frac{h_1}{D} & \text{(I)} \\ H = h_1 + A & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando h_1 em (I) e substituindo em (II), obtêm-se:

$$H = \operatorname{tg}(90 - x)D + A$$

Portanto, o modelo que pode ser utilizado em todos os casos que se utilize o teodolito artesanal para medir altura de qualquer objeto é:

$$\boxed{H = \operatorname{Tg}(90 - x)d + A}$$

Com esse material concreto é possível explorar a trigonometria de várias formas, podendo inverter o problema, como exemplo, em vez de descobrir a altura de um objeto, pode-se descobrir a altura do observador, nesse caso já possuindo o conhecimento da altura do objeto, para isso pode-se usar a relação trigonométrica seno.

4.1.4 Síntese da atividade

- **Interação**

- Reconhecimento da situação-problema

- * Curiosidade: Como é possível medir a altura de algum objeto com o uso do teodolito artesanal?

- Familiarização do assunto a ser modelado
 - * Busca de informações sobre o que é o teodolito
 - * Construção do teodolito artesanal

• Matemática

- Formulação do problema
 - * Como determinar a altura de um objeto com base no ângulo indicado pelo teodolito artesanal?

- Resolução do problema em termos matemáticos

O esquema do observador e o objeto que se quer medir pode ser representado por um triângulo retângulo, então conhecendo a distância entre quem observa e o objeto, bem como a altura do observador é possível calcular a altura do objeto usando a relação trigonométrica tangente.

- * Definição de elementos gerais

Altura do observador = A

Distância do objeto = d

Ângulo marcado = α

$H = h_1 + h_2 =$ Altura do objeto

- * Modelo Matemático

$H = tg(90^\circ - \alpha)d + A$

- * Conhecimento matemático

Medição e relação trigonométrica tangente

• Modelo

- Interpretação do modelo
 - * A equação obtida permite determinar a altura de um objeto qualquer, apenas com o conhecimento da altura do observador e sua distância até o objeto.
- Validação
 - * A validação consiste em usar o teodolito para medir alturas de um objeto em diversas distâncias diferentes e comparar os resultados.

4.2 Trigonometria no horário de verão

4.2.1 Interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia

O horário de verão, que consiste em adiantar o relógio em uma hora, é uma medida adotada pelo Estado brasileiro, para redução do consumo de energia. Em um determinado período, para aproveitar a iluminação solar altera-se o horário, gerando economia nos horários de pico.

Para isso, é verificado o período em que a iluminação solar dura mais, ou seja, momento em que os dias são mais longos que as noites. Este fenômeno é estudado na disciplina de Geografia, é o chamado solstício de verão, porém esse evento é mais evidente em regiões mais afastadas da linha do equador.

Como pode ser visualizado na figura 4.9, as regiões do Brasil mais afastadas da linha do Equador são: Sul, Sudeste Centro-Oeste, são essas que atualmente adotam o horário de verão.



Figura 4.9: Linha do Equador

Não é apenas o Brasil que utiliza esse artifício para proveito da iluminação solar, quanto mais ao sul do hemisfério terrestre uma determinada região se encontra, mais longo os dias são em relação às noites. Inclusive, em alguns lugares do mundo ocorre um fenômeno chamado sol da meia noite, onde é possível ver a luz do sol no horário de meia noite, no entanto, devido ao extremo frio, a maioria são locais não habitados, mas alguns países habitados podem desfrutar desse fenômeno durante alguns dias do solstício de verão, como Canadá, Rússia, Noruega, etc.

4.2.2 Coleta das informações iniciais

Com intuito de despertar o interesse dos alunos, é importante que as atividades de modelagem sejam com fatores mais próximos da realidade do aluno, no caso do estudo do horário de verão, seria ideal usar informações da própria cidade dos estudantes.

Nessa proposta, não foi escolhida a cidade de São Luís, tendo em vista a pouca diferença da duração dos dias entre si, em virtude da cidade ser próxima à linha do equador (mesma razão pelo Brasil não adotar horário de verão nas reuniões norte e nordeste). Considerando tal premissa, foi escolhida a capital do estado mais meridional do país, Porto Alegre - Rio Grande do Sul.

Após a escolha da cidade, o próximo passo é delimitar a investigação, coletando na tabela 4.2 o horário do nascer e do pôr do sol em Porto Alegre, o ano escolhido foi 2015.

Para que o trabalho não se torne excessivo, em vez de coletar todos os dias do ano, coleta-se a cada 10 dias durante todo o ano, sendo assim, obtêm-se, segundo o site calendário-365, o comportamento descrito na tabela abaixo:

Data	Nascer do Sol	Pôr do Sol	Duração do dia
01/jan/15	06:29	20:30	14h 1m
11/jan/15	06:35	20:31	13h 56m
21/jan/15	06:44	20:29	13h 45m
01/fev/15	06:53	20:23	13h 30m
11/fev/15	07:02	20:16	13h 14m
21/fev/15	07:10	20:07	12h 57m
01/mar/15	06:16	18:59	12h 43m
11/mar/15	06:23	18:47	12h 24m
21/mar/15	06:29	18:35	12h 06m
01/abr/15	06:36	18:22	11h 46m
11/abr/15	06:41	18:10	11h 29m
21/abr/15	06:48	17:59	11h 11m
01/mai/15	06:54	17:50	10h 56m
11/mai/15	07:00	17:42	10h 42m
21/mai/15	07:06	17:36	10h 30m

01/jun/15	07:13	17:33	10h 20m
11/jun/15	07:17	17:32	10h 15m
21/jun/15	07:20	17:33	10h 13m
01/jul/15	07:22	17:36	10h 14m
11/jul/15	07:20	17:40	10h 20m
21/jul/15	07:17	17:46	10h 29m
01/ago/15	07:11	17:52	10h 41m
11/ago/15	07:03	17:58	10h 55m
21/ago/15	06:53	18:04	11h 11m
01/set/15	06:41	18:10	11h 29m
11/set/15	06:29	18:15	11h 46m
21/set/15	06:16	18:20	12h 04m
01/out/15	06:04	18:26	12h 22m
11/out/15	05:52	18:32	12h 40m
21/out/15	06:41	19:39	12h 58m
01/nov/15	06:30	19:47	13h 17m
11/nov/15	06:23	19:55	13h 32m
21/nov/15	06:18	20:04	13h 46m
01/dez/15	06:16	20:12	13h 56m
11/dez/15	06:17	20:19	14h 02m
21/dez/15	06:20	20:25	14h 05m
31/dez/15	06:26	20:29	14h 05m

Tabela 4.2: Horário do nascer do sol em Porto Alegre-RS
no ano de 2015

Com o intuito de melhor visualização da duração dos dias, é aconselhável incluir na tabela a duração de cada dia, preferencialmente em horas.

O professor deve atribuir essa tarefa aos alunos, separando-os em dupla ou grupos, dependendo do tamanho da turma, os quais utilizando uma simples regra de três, obterão a tabela 4.3:

Data	Nascer do Sol	Pôr do Sol	Duração do dia	t	Duração do dia em horas D (t)
01/jan/15	06:29	20:30	14h 1m	0	14,10
11/jan/15	06:35	20:31	13h 56m	1	13,93
21/jan/15	06:44	20:29	13h 45m	2	13,75
01/fev/15	06:53	20:23	13h 30m	3	13,50
11/fev/15	07:02	20:16	13h 14m	4	13,23
21/fev/15	07:10	20:07	12h 57m	5	12,95
01/mar/15	06:16	18:59	12h 43m	6	12,72
11/mar/15	06:23	18:47	12h 24m	7	12,40
21/mar/15	06:29	18:35	12h 06m	8	12,10
01/abr/15	06:36	18:22	11h 46m	9	11,77
11/abr/15	06:41	18:10	11h 29m	10	11,48
21/abr/15	06:48	17:59	11h 11m	11	11,18
01/mai/15	06:54	17:50	10h 56m	12	10,93
11/mai/15	07:00	17:42	10h 42m	13	10,70
21/mai/15	07:06	17:36	10h 30m	14	10,50
01/jun/15	07:13	17:33	10h 20m	15	10,33
11/jun/15	07:17	17:32	10h 15m	16	10,25
21/jun/15	07:20	17:33	10h 13m	17	10,22
01/jul/15	07:22	17:36	10h 14m	18	10,23
11/jul/15	07:20	17:40	10h 20m	19	10,33
21/jul/15	07:17	17:46	10h 29m	20	10,48
01/ago/15	07:11	17:52	10h 41m	21	10,68
11/ago/15	07:03	17:58	10h 55m	22	10,92
21/ago/15	06:53	18:04	11h 11m	23	11,18
01/set/15	06:41	18:10	11h 29m	24	11,48
11/set/15	06:29	18:15	11h 46m	25	11,77
21/set/15	06:16	18:20	12h 04m	26	12,07
01/out/15	06:04	18:26	12h 22m	27	12,37
11/out/15	05:52	18:32	12h 40m	28	12,67
21/out/15	06:41	19:39	12h 58m	29	12,97

01/nov/15	06:30	19:47	13h 17m	30	13,28
11/nov/15	06:23	19:55	13h 32m	31	13,53
21/nov/15	06:18	20:04	13h 46m	32	13,77
01/dez/15	06:16	20:12	13h 56m	33	13,93
11/dez/15	06:17	20:19	14h 02m	34	14,08
21/dez/15	06:20	20:25	14h 05m	35	14,33
31/dez/15	06:26	20:29	14h 05m	36	14,05

Tabela 4.3: Horário do nascer do sol em Porto Alegre - RS no ano de 2015 com duração dos dias

Diante das informações coletadas, depara-se com o seguinte problema: como determinar a duração de um dia em relação aos dias do ano de 2015 em Porto Alegre - RS?

Para solucionar, deve-se determinar qual o conhecimento matemático necessário para chegar a solução. Para visualização do comportamento dos dias, pode-se transcrever as informações obtidas em uma função e em seguida construir o gráfico. Por meio dele é possível visualizar de maneira eficiente o comportamento dos dias no decorrer do ano em questão. Para tanto, deve-se definir as variáveis da função.

- t - tempo é a variável que se associa aos dias.
- $D(t)$ - duração do dia, dada em horas.

Com base nos dados obtidos e nas variáveis determinadas, têm-se a representação no plano cartesiano, onde o eixo das abscissas é representado por t e das ordenadas, por $D(t)$:

A variação dos dias no decorrer dos anos é periódica, além disso, a curva de tendência encontradas, tem semelhança aproximada com a função cosseno, conforme a figura 3.4.2, na página 41.

Com a compressão do conhecimento matemático que deve ser aplicado, através da Modelagem Matemática será encontrado o modelo que consiste numa função cosseno que representa a duração dos dias em Porto Alegre no ano de 2015.

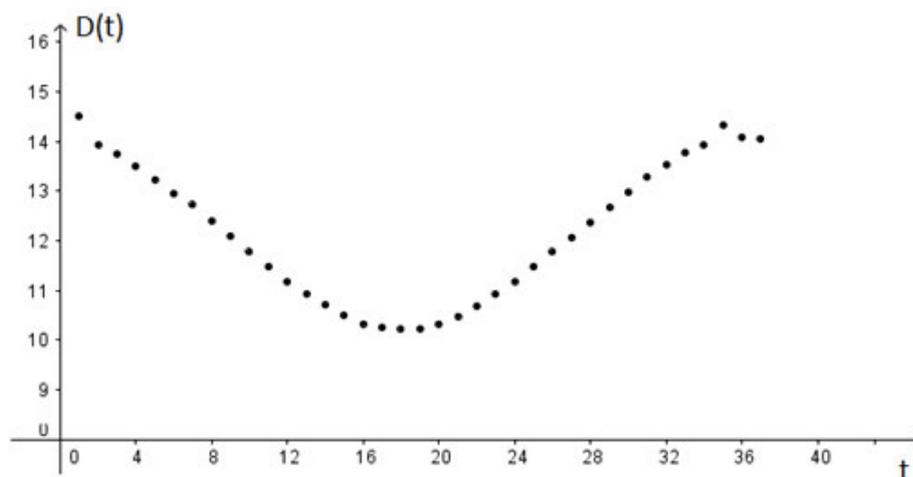


Figura 4.10: Representação gráfica da duração dos dias em Porto Alegre em 2015

Em seguida será realizada, a validação do modelo, ao verificar-se qual o período ideal para horário de verão e compará-lo com período do solstício de verão.

Para iniciar o processo, será considerada o modelo que expressa, de um modo geral, os fenômenos periódicos representados pela função cosseno que é $F(t) = B + A\cos(Ct + D)$, onde A, B, C e D são números reais, com base nessa forma geral serão encontrados os valores de A, B, C e D, necessários para que o modelo passe pelos pontos do gráfico, ou que pelo menos se aproxime ao máximo deles.

Na investigação dessa atividade será necessário à utilização de um software para a construção dos gráficos que auxiliará na interpretação dos parâmetros. Portanto, nos próximos gráficos será utilizado o *Geogebra* que é um software livre de fácil manipulação e layout didático.

4.2.3 Investigação dos parâmetros

Antes de abordar conceitos matemáticos do que venham a ser cada parâmetro, é fundamental que os alunos tentem construir seus próprios conceitos, para isso, à medida que os parâmetros são testados, devem ser analisados o comportamento gráfico da função.

Antes dos testes, ressalta-se a importância de definir alguns elementos fundamentais para encontrar o modelo: imagem e o período da função cosseno.

A imagem da função corresponde aos valores máximos e mínimos que a duração dos dias podem assumir.

O mínimo da função corresponde ao dia cuja duração é mais curta, o que ocorre no dia 21/06, duração de 10,22 horas.

O máximo da função, cuja duração do dia é mais longa, ocorre no dia 21/12, duração de 14,33 horas.

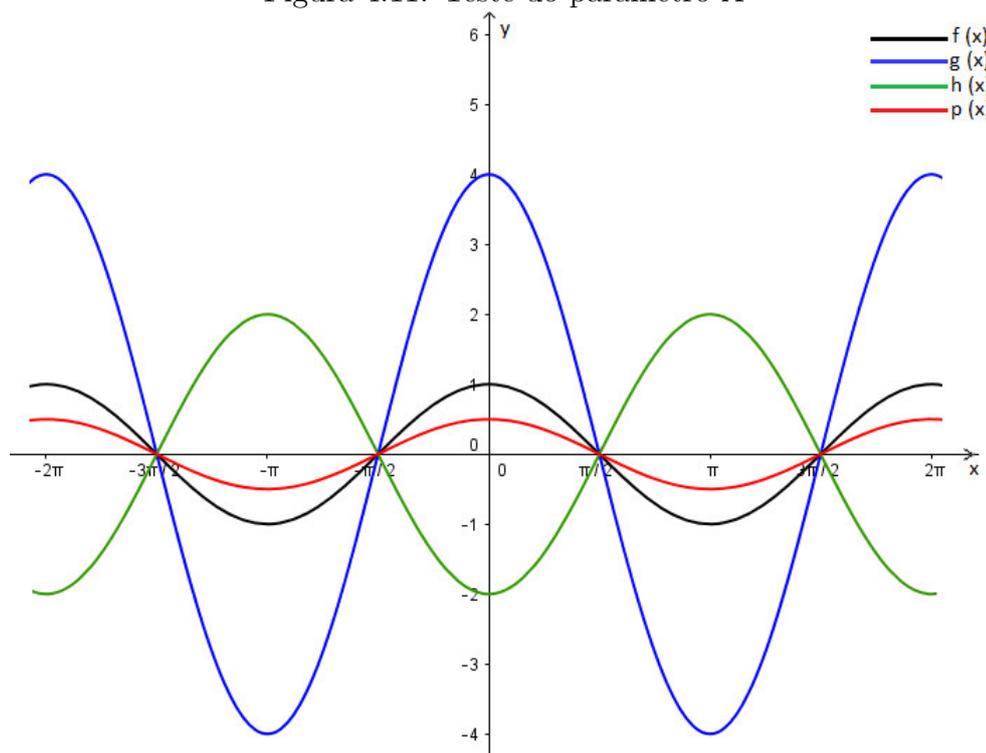
Portanto, a imagem da função é $\text{Im} = [10, 22; 14,33]$.

O período entre os dias mais longos e o dia mais curto, no caso em questão, obtêm-se: 18 dias. Logo o período entre os dias mais duradouros é 36 dias.

Inicia-se a investigação, sendo o parâmetro A o primeiro a ser estudado, onde valores serão atribuídos a ele e sua influência analisada.

Considerando a função $f(x) = A\cos(x)$. Adota-se $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = 4\cos(x)$, $h(x) = -2\cos(x)$ e $p(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$, representados na figura 4.11.

Figura 4.11: Teste do parâmetro A



A interpretação da figura, sugere que a amplitude de cada função varia à medida que a mesma é multiplicada por um valor qualquer.

A amplitude corresponde à média entre o valor máximo e mínimo, com base nessa definição, verifica-se o comportamento da amplitude nas funções adotadas, como segue:

$$f(x) = \cos(x) \text{ Im } = [-1, 1] \quad A = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

$$g(x) = 4\cos(x) \text{ Im } = [-4, 4] \quad A = \frac{4 - (-4)}{2} = 4$$

$$h(x) = -2\cos(x) \text{ Im } = [-2, 2] \quad A = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$$

$$q(x) = \frac{1}{2}\cos x \text{ Im } = \left[\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right] \quad A = \frac{\frac{-1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclui-se que ao multiplicar um número a uma função cosseno, equivale-se a multiplicar este número a sua imagem e conseqüentemente altera-se a amplitude da função. Ou seja, de um modo genérico, verificou-se que a imagem da função $f(t) = A\cos(t)$ corresponde a $\text{Im} = [-A, A]$, sendo assim, o parâmetro A está relacionando com a amplitude da função.

Na situação do horário de verão em que a imagem obtida é $\text{Im} = [10, 22; 14, 33]$, para encontrar a amplitude, deve-se encontrar diferença entre os máximos e mínimos, em seguida dividir o resultado por 2, como segue:

$$\text{Amplitude} = \frac{14,33 - 10,22}{2} = 2,055.$$

Obtemos, portanto, que $D(t) = 2,055\cos(t)$.

O próximo passo é identificar o parâmetro “B” da função $D(t) = B + 2,055\cos(t)$.

Considerando a função $f(x) = B + \cos x$, adotam-se as funções: $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 + \cos x$, $h(x) = 3 + \cos x$ e $p(t) = -2 + \cos x$, para estudar o comportamento das mesmas.

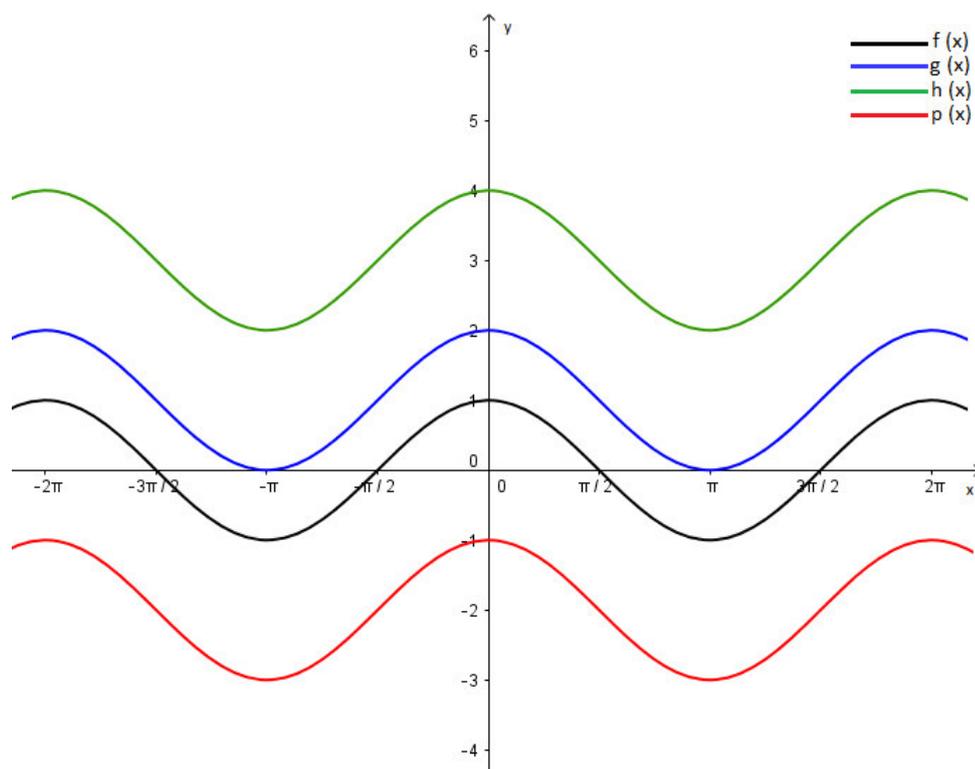


Figura 4.12: Teste do parâmetro B

Na figura 4.2.3 observa-se um deslocamento vertical no gráfico, que altera a imagem nas funções, como segue:

$$f(x) = \cos(x); \text{Im} = [-1, 1]$$

$$g(x) = 1 + \cos(x); \text{Im} = [0, 2]$$

$$h(x) = 3 + \cos(x); \text{Im} = [2, 4]$$

$$q(x) = -2 + \cos(x); \text{Im} = [-3, 1]$$

Com essa relação, pode-se assim considerar que ao somar um número à função cosseno, equivale a somar este número a sua imagem, portanto, de um modo generalizado, conclui-se que a imagem da função $f(t) = B + \cos(t)$ corresponde a $\text{Im} = [-1+B, 1+B]$.

$$[-2, 055 + B; 2, 055 + B] = \text{Im} = [10, 22; 14, 33]$$

Logo B é 12,16 e a função encontrada é $D(t) = 12, 275 + 2, 055\cos(t)$.

Agora o teste será realizado com o parâmetro C, considerando a função $f(x) = \cos(Cx)$. Adota-se $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(4x)$, $h(x) = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$.

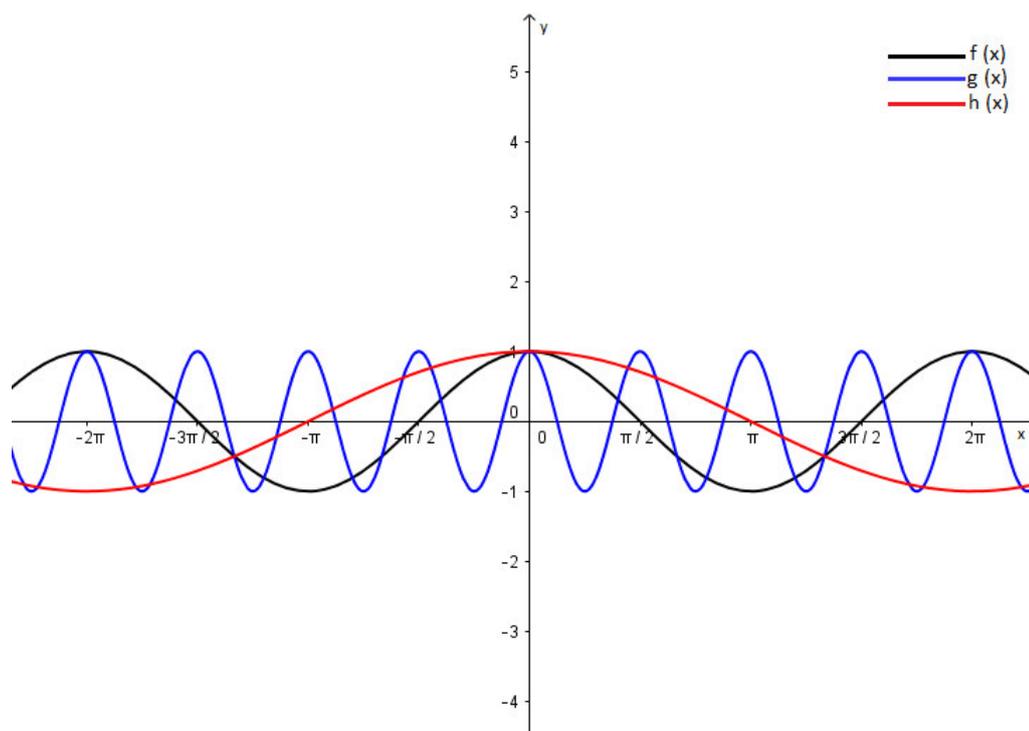


Figura 4.13: Teste do parâmetro C

Como pode ser visualizado por meio da figura 4.1.3, ocorre alteração apenas em relação ao eixo x , provocando o “esticamento” e “encolhimento” das funções, não alterando a imagem, mas apenas o período, sendo assim, têm-se:

O período da função é o menor valor possível para p , onde $f(x) = f(x + p)$, para todo x . E pode ser verificado através do gráfico dos exemplos adotados o período da função $f(x) = \cos x$ é 2π , $g(x) = \cos(4x)$ é $\frac{\pi}{2}$, $h(x) = \cos(\frac{1}{4}x)$ é 8π .

Portanto, chega-se a expressão que relaciona o período da função com o parâmetro C : $p = \frac{2\pi}{|C|}$.

Na situação do “Horário de verão” o período encontrado é de 36 dias, daí segue:

$$36 = \frac{2\pi}{|C|} \Rightarrow C = \frac{\pi}{18}$$

Obtêm-se a função $D(t) = 12,275 + 2,055\cos(\frac{t\pi}{18})$.

Por fim, será investigado o parâmetro D, que é aquele somado à variável da função cosseno. A priori, verifica-se a representação gráfica de $f(x) = \cos x$, $g(t) = \cos(x + \pi)$ e $h(t) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

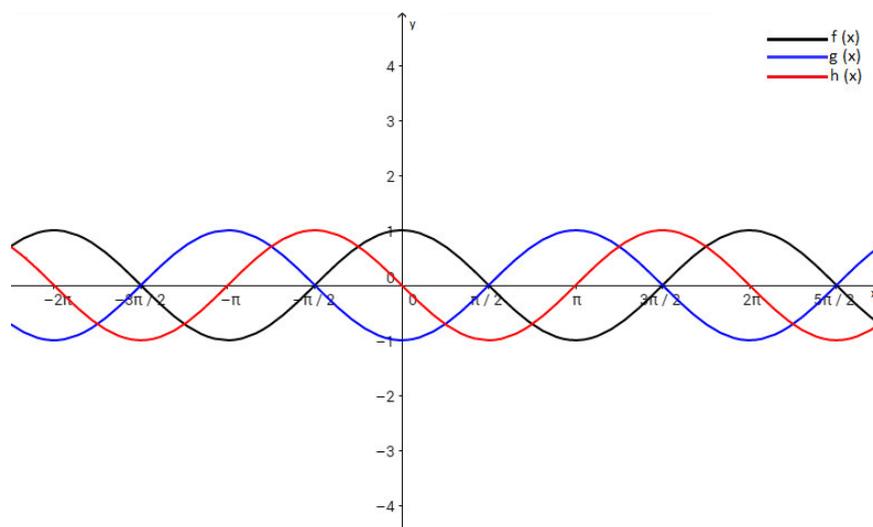


Figura 4.14: Teste do parâmetro D

Em análise ao gráfico observa-se que a imagem da função não se altera, e ao tomar como referência a função $f(x)$, verifica-se o deslocamento horizontal das funções, no caso da função $g(x)$ o deslocamento é para a esquerda com medida π , já em relação à função $h(x)$ o deslocamento é para a direita com medida $\frac{\pi}{2}$.

Para encontrar o parâmetro D, deve-se tomar dois pontos quaisquer da tabela 4.3, por exemplo (17; 10,22) e considerando a função $D(t) = 12,275 + 2,055 \cos(t \frac{\pi}{18} + D)$ é possível construir a equação:

$$10,22 = 12,275 + 2,06 \cos\left(\frac{17\pi}{18} + D\right)$$

$$-2,06 = 2,06 \cos\left(\frac{17\pi}{18} + D\right)$$

$$-1 = \cos\left(\frac{17\pi}{18} + D\right)$$

$$\cos\pi = \cos\left(\frac{17\pi}{18} + D\right)$$

$$\pi = \frac{17\pi}{18} + D$$

$$D = \frac{\pi}{18}$$

Diante do exposto, encontra-se o modelo matemático que representa a duração dos dias no ano de 2015 na cidade de Porto Alegre, que é dado por $F(t) = 12,275 + 2,055\cos(t\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18})$ para t dado em horas, onde $0 \leq t \leq 36$, com representação gráfica:

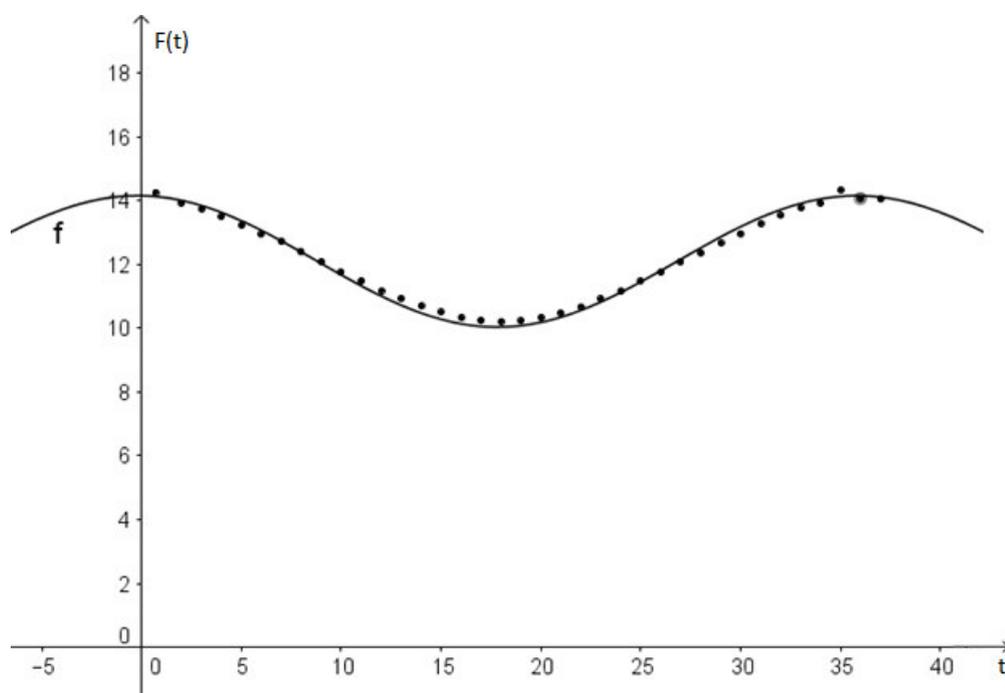


Figura 4.15: Gráfico do modelo encontrado

Em seguida a obtenção do modelo, pode-se determinar qual o período ideal para aplicação do horário de verão na cidade.

Almeida *et al* (2010, p. 10) esclarecem:

Os dias do início e término do horário de verão correspondem àqueles em que a variação da duração do dia cresce mais lentamente (início) ou diminui mais lentamente (término). Em outras palavras, esses dias correspondem àqueles em que a duração do dia passa ser maior que a média anual (início) ou o menor que a média anual (término).

Sob à luz do esclarecimento de Almeida *et al*, para determinar o período ideal para aplicação do horário de verão na cidade em questão, faz-se necessário encontrar a média anual da duração dos dias no decorrer do ano.

Considerando a média dos pontos máximos e mínimos da função, têm-se:

$$\frac{14,33 + 10,22}{2} = 12,28$$

Para resolver o problema basta resolver a equação do modelo, onde $F(t) = 12,28$:

$$12,28 = 12,28 + 2,055 \cos\left(t \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18}\right)$$

$$0 = 2,055 \cos\left(t \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18}\right)$$

$$\cos\left(t \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{18}(t+1) = t+1 = 27 \therefore t = 26$$

ou

$$\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{18}(t+1) = t+1 = 9 \therefore t = 8$$

Logo, $t=08$ e $t=26$ que correspondem, respectivamente, a 21 mar e 21 set, são as datas ideais para o término e início de verão.

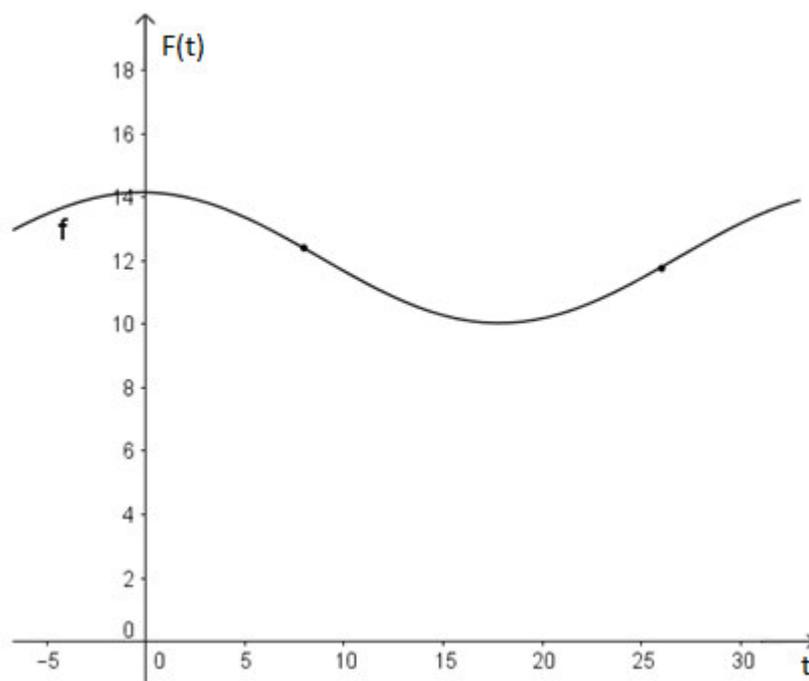


Figura 4.16: Gráfico do modelo e pontos de início e término do horário de verão

4.2.4 Síntese da atividade

Com intuito de evidenciar as fases da Modelagem Matemática sugeridas por Biembengut. Estas são as etapas da proposta apresentada:

- **Interação**

- Reconhecimento da situação-problema
 - * Pesquisa sobre os temas: solstício de verão e horário de verão.
- Familiarização do assunto a ser modelado.
 - * Coleta dos dados;
 - * Análise dos dados coletados sobre a duração dos dias do ano de 2015 em Porto Alegre.

- **Matematização**

- Formulação do problema
 - * Como determinar a duração dos dias no decorrer do ano de 2015 na cidade de Porto Alegre?
 - * Qual o período ideal para aplicação do horário de verão na cidade?
- Resolução do problema em termos matemáticos

A duração dos dias no decorrer dos anos é uma função periódica, por essa razão pode ser representada através de uma função trigonométrica, no caso uma função cosseno.

- * Definição das variáveis
 - t - representação dos dias do ano de 2015;
 - D(t) - duração do dia em horas no dia t.
- * Modelo Matemático
$$F(t) = 12,275 + 2,055 \cos\left(t\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18}\right)$$
- * Conhecimento matemático
 - Regra de três
 - Função trigonométrica cosseno

- **Modelo**

-
- Interpretação do modelo
 - * A função trigonométrica obtida permite descrever a duração dos dias do ano de 2015 em Porto Alegre - RS.
 - * Por tratar-se de um fenômeno periódico, a duração dos dias repete-se em intervalos regulares, sendo assim, o modelo encontrado também é útil para realizar previsões para os anos seguintes.

 - Validação
 - * Determinação dos dias 21 de março e 21 de setembro como datas ideais para o término e início de verão, respectivamente.
 - * O modelo também pode ser validado determinado o período ideal para o horário de verão em outros anos, além de 2015.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha do tema se deu pela minha fascinação pelo assunto, que me despertou desde a graduação, porque percebi que as particularidades da Modelagem Matemática são capazes de desmitificar a Matemática, que hoje tem o título de umas piores disciplinas do currículo escolar.

A Modelagem Matemática como ferramenta pedagógica é um desafio para os alunos, pois é capaz de tirá-los da “zona de conforto” e levá-los a construir novos saberes, sem definições decoradas e atividades quase mecânicas desvinculadas de aplicação. Com essa metodologia é possível suprir a carência dos jovens que concluem o ensino básico tanto precisam: autonomia no pensar.

Na atividade com o teodolito artesanal, há que ser enaltecido o uso do material concreto na prática pedagógica, especialmente quando o material é confeccionado pelos próprios alunos. Geralmente nos livros didáticos a “aplicação” da trigonometria proposta é que se calcule a altura do objeto com base no ângulo, na altura do observador e distância do objeto, nesse caso a atividade não é sólida, então o aluno parte para os cálculos mecânicos, que por vezes não tem significados, justamente porque não despertam o interesse do aluno. Com a utilização do material concreto, a atividade é palpável e as dúvidas e interesses vão surgindo no decorrer do processo, então a atividade ganha significado e dinamismo.

Outro ponto que merece destaque é a importância do uso de tecnologia nas metodologias de ensino da matemática, o que foi evidenciado na atividade “Trigonometria e o horário de verão”, visto que sem o uso do *Geogebra* durante a atividade, a mesma se tornaria mais extensa, além de não garantir um aprendizado tão qualitativo em comparação com o uso do *software*. Nesta atividade, também foi evidenciando que aluno não necessariamente deve ter o conhecimento prévio dos conceitos matemáticos, visto que é possível que os alunos criem seus próprios conceitos à medida que os parâmetros são analisados graficamente.

Por fim, vale frisar que aqueles professores que se sentirem à vontade para abraçar essa metodologia, é de fundamental importância o aprimoramento contínuo, vi-

sando seu próprio desenvolvimento e auto-confiança na condução desses conteúdos em sala de aula.

Entendo que a principal motivação dos professores que optam por utilizar a Modelagem Matemática como quebra de paradigma do ensino tradicional da Matemática é observar o entusiasmo dos alunos, troca de experiências e assimilação das aulas, além de outros benefícios.

REFERÊNCIAS

- [1]ALMEIDA, Lourdes Werle de. SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- [2]ALMEIDA, Lourdes M. W. de ; SILVA, Karina A. P. ; CYRINO, M. C. C. T. ; SOUZA, Luciana G. S. ; PALHARINI, Bárbara N. A. S. ; VERTUAN, Rodolfo E. **Experimento Educacional**: “Experimento: Horário de Verão”. 2010 (Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Experimento Educacional).
- [3]Ana França. **Como funciona o horário de verão**. Disponível em <http://empresas-e-financas.hsw.uol.com.br/horario-de-verao.htm>. Acesso em: 10 de mai. 2016.
- [4]BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.
- [5]BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática**: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.
- [6]BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.
- [7]BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo; Contexto, 2011.
- [8]BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blucher (Editora Da Universidade de São Paulo), 1996.
- [9]FLEMMING, D. M.; LUZ, E.; MELLO, A. C.C. **Tendências em educação matemática**. Palhoça, Rio Grande do Sul: UnisuVirtual, 2005.
- [10]GIOVANNI, José Ruy; BONJORNIO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. São Paulo: FTD, 2000. v.2.
- [11]HERMINIO, Maria Helena Garcia B. **O processo de escolha dos temas dos projetos de Modelagem Matemática**. 2009. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de pós-graduação em Educação Matemática - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2009.
- [12]IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria**. 2 ed. São Paulo: Atual Ed. 1978. v. 3
- [13]LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [14]MOL, Rogerio S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.
- [15]NOGUEIRA, Eduardo Arantes; MARTINS, Luiz Eduardo Barreto; BREZIKOFER, René. **Modelos matemáticos nas ciências não-extras**. São Paulo: Blucher, 2008.
- [16]OLIVEIRA, Joerk da Silva. **Aplicações da trigonometria nas ciências**. 2015. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade Federal de Roraima-RR, 2015
- [17]OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG, 2013.

- [18] OLIVEIRA, Wander de. **Matemática e Música: Interdisciplinaridade no ensino da trigonometria e uma proposta de atividades para sala de aula.** 2015. 196 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2015.
- [19] PAIVA, Manoel. **Matemática.** 1 ed. São Paulo : Editora Moderna. 2004. Vol Único.
- [20] RIBEIRO, Flávia Dias. **Metodologia do ensino de Matemática e Física.** Curitiba: Ibplex, 2008.
- [21] Robison Sá. **História da Trigonometria.** Disponível em: <http://www.infoescola.com/matematica/historia-da-trigonometria>. Acesso em: 03 de mar de 2016.
- [22] SANTOS, Luiz Anderson de Moraes. **Utilização de material concreto no ensino de matemática: Uma Experiência com o Teodolito Caseiro no Ensino de Trigonometria.** 2015. 87 f. Dissertação (mestrado em matemática) - Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional - Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal de Rondônia - UNIR, Porto velho - RO, 2015
- [23] SCHERPINSKI, N. I. **Venha navegar por outros mares!**. In: Seed PR. (Org.). Livro didático público: Matemática. 2 ed. Curitiba: Ícone audiovisual LTDA, 2007, v. 1, p. 103-117.
- [24] SILVA, Sebastião Rodrigues da. **O uso da modelagem matemática no ensino de funções básicas.** 2014. 72f. Dissertação (mestrado em matemática) - Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional - Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal do Amapá - MACAPA-AP, 2014.
- [25] SOARES, Maria Zoraide M. C.; SANTINHO, Miriam Sampieri; MACHADO, Rosa Maria; RODRIGUES, Wilson Roberto. **Guia do professor experimento a altura da árvore.** Creative Commons. Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, 2012.
- [26] SOUZA, Bárbara N. P. A.; SILVA, Karina Alessandra P. da; ALMEIDA, Lourdes M. W. de; SOUZA, Luciana G. S.; CYRINO, Márcia Cristina de C. T.; VERTUAN, Rodolfo E.. **Guia do professor conteúdos digitais experimento horário de verão.** Editora Creative Commons. Universidade Federal do Paraná - UFPR- Unicamp, 2012.
- [27] Valéria Ostete Jannis Luchetta. **Papiro Rhind.** Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/prhind.html>. Acesso em: 10 de mar. 2016.

Apêndice

Ângulo	Cosseno	Ângulo	Cosseno
0	1,0	46	0,6946583705
1	0,9998476952	47	0,6819983601
2	0,999390827	48	0,6691306064
3	0,9986295348	49	0,656059029
4	0,9975640503	50	0,6427876097
5	0,9961946981	51	0,629320391
6	0,9945218954	52	0,6156614753
7	0,9925461516	53	0,6018150232
8	0,9902680687	54	0,5877852523
9	0,9876883406	55	0,5735764364
10	0,984807753	56	0,5591929035
11	0,9816271834	57	0,544639035
12	0,9781476007	58	0,5299192642
13	0,9743700648	59	0,5150380749
14	0,9702957263	60	0,5
15	0,9659258263	61	0,4848096202
16	0,9612616959	62	0,4694715628
17	0,956304756	63	0,4539904997
18	0,9510565163	64	0,4383711468
19	0,9455185756	65	0,4226182617
20	0,9396926208	66	0,4067366431
21	0,9335804265	67	0,3907311285
22	0,9271838546	68	0,3746065934
23	0,9205048535	69	0,3583679495
24	0,9135454576	70	0,3420201433
25	0,906307787	71	0,3255681545
26	0,8987940463	72	0,3090169944
27	0,8910065242	73	0,2923717047
28	0,8829475929	74	0,2756373558
29	0,8746197071	75	0,2588190451
30	0,8660254038	76	0,2419218956
31	0,8571673007	77	0,2249510543
32	0,8480480962	78	0,2079116908
33	0,8386705679	79	0,1908089954
34	0,8290375726	80	0,1736481777
35	0,8191520443	81	0,156434465
36	0,8090169944	82	0,139173101
37	0,79863551	83	0,1218693434
38	0,7880107536	84	0,1045284633
39	0,7771459615	85	0,0871557427
40	0,7660444431	86	0,0697564737
41	0,7547095802	87	0,0523359562
42	0,7431448255	88	0,0348994967
43	0,7313537016	89	0,0174524064

44	0,7193398003	90	0,0
45	0,7071067812		

Tabela 5.1: Tabela Trigonométrica Cosseno